

# Höhere Mathematik für technische Studiengänge

## Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

### Differentialrechnung für eine Veränderliche

#### 1. Lösungshinweise:

a)  $f(x) = x\sqrt{x^2} = x|x|$  ,  $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0 ,$$

d.b.  $f(x)$  in  $x_0 = 0$  differenzierbar mit  $f'(0) = 0$  .

b)  $f(x) = \sqrt{1 - |x - 2|}$  ,  $x_0 = 2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - |h|} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - |h|} - 1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1 - |h|} + 1}{\sqrt{1 - |h|} + 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - |h| - 1}{h \sqrt{1 - |h|} + 1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 - |h|} + 1} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} .$$

Weil  $\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{h}{h} = +1$  , jedoch  $\lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{-h}{h} = -1$

existiert der Grenzwert nicht. d.b.  $f(x)$  in  $x_0 = 2$  nicht differenzierbar.

c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$  ,  $x_0 = 0$  .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos h - 1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h^2}$$

Wegen  $\cos x = \cos 2 \cdot \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  , gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2) \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

d.b.  $f(x)$  in  $x_0 = 0$  differenzierbar mit  $f'(0) = -\frac{1}{2}$  .

#### 2. Lösungshinweise:

$f(x) = \ln x$  ,  $x_0 > 0$  .

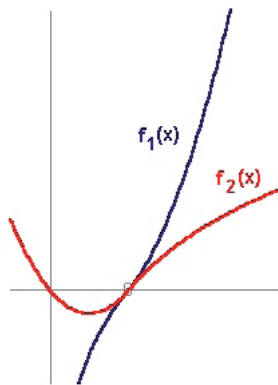
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x_0 + h}{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left( \frac{x_0 + h}{x_0} \right)^{\frac{1}{h}} = \ln \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{x_0} h \right)^{\frac{1}{h}} \right] \\ &= \ln e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

### 3. Lösungshinweise:

Für  $f(x) = (x - a)^2 + b$  und  $g(x) = \ln x$  muß gelten, daß  $f(1) = (1 - a)^2 + b = g(1) = 0$  und  $f'(1) = 2(1 - a) = g'(1) = 1$ . Daraus ergibt sich  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{4}$ . Dabei gibt es zwei Möglichkeiten, Teile von  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $x_0 = 1$  zu verbinden:

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln x & , 0 < x \leq 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} & , 1 < x \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} & , x \leq 1 \\ \ln x & , x > 1 \end{cases}$$



### 4. Lösungshinweise:

a)  $y' = -\frac{1}{x^3}$

b)  $y' = \frac{15}{4}x^2 \sqrt[4]{x^3}$

c)  $y' = x(2 \ln x + 1) - 4x^{-2}$

d)  $y' = 3x e^{-x}(2 \ln x - x \ln x + 1)$

e)  $y' = -\frac{a}{\sqrt{x(a+\sqrt{x})^2}}$

f)  $y' = -\frac{\arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$

g)  $y' = \frac{1+x+\ln x}{(1+x)^2}$

h)  $y' = -6x^2 \sin(2x^3)$

### 5. Lösungshinweise:

a)  $y' = -\sin 2x$ ,  $y'(\frac{\pi}{4}) = -1$ ,

b)  $y' = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ ,  $y'(1) = \frac{1}{2}$ .

### 6. Lösungshinweise:

a)  $y' = (\cos x)^{x^2+4}(2x \ln \cos x - (x^2 + 4) \tan x)$

b)  $y' = (a + x \ln a + 2 \ln x)x^{a-1}a^x x^{\ln x}$

c)  $y = \frac{\sqrt[3]{x^2+2}(2x^3-7)^2}{\sqrt[4]{x^3+7}(5x^2-4)^3 x^4} \left( \frac{2x}{3x^2+6} + \frac{12x^2}{2x^3-7} - \frac{3x^2}{4x^2+28} - \frac{30x}{5x^2-4} - \frac{4}{x} \right)$

### 7. Lösungshinweise:

Schnittpunkt  $(3;0)$ ; Winkel  $y' = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ ,  $\tan \alpha = y'(3) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ; Tangente  $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ .

### 8. Lösungshinweise:

Tangentenanstieg  $f'(x) = \frac{2}{\sin 2x} \stackrel{!}{=} 2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$ . Damit erhält man  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $y_0 = 0$ ,  $a = -\frac{\pi}{2}$ .

## 9. Lösungshinweise:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x}}{-\frac{3 \sin 3x}{\cos 3x}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \tan^2 2x)}{3(1 + \tan^2 3x)} = \frac{4}{9}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 + 3e^{ax}) + e^a}{5 + 7x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3ae^{ax}}{2+3e^{ax}}}{7} = \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3ae^{ax}}{2 + 3e^{ax}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \\ = \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3a^2 e^{ax}}{3ae^{ax}} = \frac{1}{7} a$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \tan \frac{a}{2^x} = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{a}{2^x}}{2^{-x}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \tan^2 \frac{a}{2^x})(-a \ln 2 \cdot 2^{-x})}{-2^{-x} \ln 2} = a$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x \ln x - 1}{\ln x} - \frac{x - 2}{x - 1} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x - 1)(x - 1) - (x - 2) \ln x}{(x - 1) \ln x} = \left( \frac{0}{0} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2 + (2x^2 - 2x) \ln x}{x - 1 + x \ln x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x - 2) \ln x + 4x - 5}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0+0} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = (\infty^0) = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln \left( \frac{1}{\sin x} \right)^{\frac{1}{\ln x}}} = e^{-1}, \text{ denn } \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \frac{1}{\sin x} = (0 \cdot \infty) \\ = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-\ln \sin x}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \\ - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = -1$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = (0^0) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}} = e^{-1}, \text{ denn}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{\frac{1}{x} + x}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} = \left( \frac{0}{0} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{1}{x} + x \right)^{-2} \left( -\frac{1}{x^2} + 1 \right)}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{1+x^2}{x} \right)^{-2} \left( \frac{-1+x^2}{x^2} \right)}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1} = -1$$

## 10. Lösungshinweise:

$f(x) = \frac{5}{6} + 3x - 2 \sinh(4x + 1)$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert und (als Komposition elementarer Funktionen) stetig.

(a) Für das Vorzeichen der ersten Ableitung gilt

$$f'(x) = 3 - 8 \cosh(4x + 1) \leq 3 - 8 < 0 \text{ weil } \cosh(4x + 1) \geq 1 \forall x \in \mathbb{R},$$

folglich ist  $f(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$  streng monoton fallend.

(b) Wegen  $\sinh(4x + 1) \underset{>}{\underset{<}{\geq}} 0$  für  $4x + 1 \underset{>}{\underset{<}{\geq}} 0$ , gilt für die 2. Ableitung

$$f''(x) = -32 \sinh(4x + 1) \underset{>}{\underset{<}{\geq}} 0 \text{ für } x \underset{>}{\underset{<}{\leq}} -\frac{1}{4}, \text{ folglich ist } f(x) \text{ konvex für } \\ x < -\frac{1}{4}, \text{ konkav für } x > -\frac{1}{4} \text{ und besitzt deshalb in } x = -\frac{1}{4} \text{ einen Wendepunkt.}$$

(c) Die Funktionswerte  $f(-\frac{1}{4}) = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} - 2 \sinh 0 = \frac{1}{12} > 0$ ,  $f(0) = \frac{5}{6} - 2 \sinh 1 = \frac{5}{6} - e + \frac{1}{e} < 0$  besitzen verschiedenes Vorzeichen, die stetige Funktion  $f(x)$  besitzt folglich eine Nullstelle in  $(-\frac{1}{4}; 0)$  (Zwischenwertsatz), die wegen der Monotonie von  $f(x)$  (Aufgabe (a)) die einzige Nullstelle ist.

11. Lösungshinweise:

Gleichung der Tangente:  $y = 2(x_0 - 1)x + 1 - x_0^2$ ;

Schnittpunkt der Tangente mit den Achsen:

$$x = 0 : y_1 = 1 - x_0^2 ;$$

$$y = 0 : 2(x_0 - 1)x_1 + 1 - x_0^2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + 1) .$$

Maximierung des Inhaltes:

$$A(x_0) = \frac{1}{2}x_1y_1 \\ = \frac{1}{4}(1 + x_0)(1 - x_0^2) = \frac{1}{4}(-x_0^3 - x_0^2 + x_0 + 1) ,$$

aus  $A' = 0$  folgt  $x_0 = \frac{1}{3}$  mit  $A''(\frac{1}{3}) < 0$ ;

$$x_1 = \frac{2}{3} , y_1 = \frac{8}{9} , A_{max} = \frac{8}{27} .$$



12. Lösungshinweise:

Gesamtfläche:  $A = a \cdot b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} (*)$

bedruckte Fläche:

$$B = (a - 0,2)(b - 0,1) \stackrel{(*)}{=} (a - 0,2) \left( \frac{1}{a} - 0,1 \right) = 1,02 - \frac{0,2}{a} - 0,1a$$

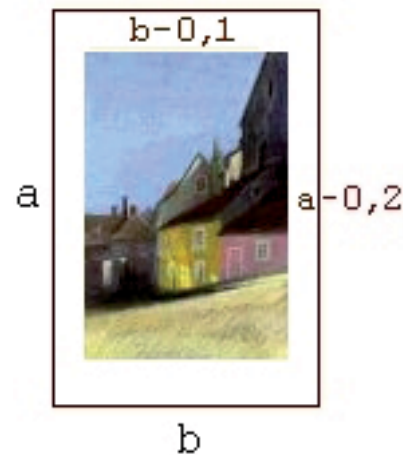
Notwendige Bedingung:

$$B'(a) = \frac{0,2}{a^2} - 0,1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow a^2 = 2 , a = \sqrt{2} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Hinreichende Bedingung:

$$B''(a) = -\frac{0,4}{a^3} < 0 \Rightarrow B''(\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow \text{rel. Max ,}$$

$$B_{max} = B(\sqrt{2}) = 1,02 - 0,2\sqrt{2} \approx 0,7372 \text{ m}^2$$



13. Lösungshinweise:

a)  $y' = C(1 + 3b)^{-2x} \ln(1 + 3b) \cdot (-2)$  ;

b)  $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \frac{\ln C - \ln y}{\ln(1 + 3b)}$  ,  $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \frac{-\frac{1}{y}}{\ln(1 + 3b)} = -\frac{1}{2y \ln(1 + 3b)}$  ;

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -2y \ln(1 + 3b) = -2C(1 + 3b)^{-2x} \ln(1 + 3b) ;$$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} C(1 + 3b)^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{\underbrace{(1 + 3b)^2}_{>1}^x} = \left( \frac{C}{\infty} \right) = 0 .$

d)  $f(x) = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-2x}$  ,  $\ln f(x) = -2x \ln \left(1 + \frac{3}{x}\right)$  (logarithmische Ableitung),

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = -2 \ln \left(1 + \frac{3}{x}\right) - 2x \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)} \left(-\frac{3}{x^2}\right) = -2 \ln \left(1 + \frac{3}{x}\right) + \frac{6}{x+3} ,$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-2x} \left(-2 \ln \left(1 + \frac{3}{x}\right) + \frac{6}{x+3}\right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x}_{\rightarrow e^3}}^2 = \frac{1}{e^6} ,$$

oder L'HOSPITALSche Regel:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x)} \stackrel{\text{(NR)}}{=} \frac{1}{e^6} .$

**NR:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -2x \ln \left(1 + \frac{3}{x}\right) = (\infty \cdot 0) = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\stackrel{\text{(l'Hospital)}}{=} -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{3}{x}} \left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{3}{x}} = -6$$

#### 14. Lösungshinweise:

Funktion und Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} , \quad D_f = \mathbb{R} , \text{ überall stetig.}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{(1+x^2) - x^2}{(\sqrt{1+x^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2} (1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -\frac{3x}{(\sqrt{1+x^2})^5}$$

Nullstellen und Vorzeichen von  $f(x)$ :

$$\begin{array}{ccc} > & & > \\ f(x) = 0 & \Leftrightarrow & x = 0 \Rightarrow \text{Nullstelle } x_0 = 0 , \text{ zugleich Schnittpunkt mit y-Achse.} \\ < & & < \end{array}$$

Extremwerte und Monotonie (Nullstellen und Vorzeichen von  $f'(x)$ ):

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in D_f \quad \Rightarrow \quad \text{streng monoton wachsend, keine relativen Extremwerte.}$$

Wendepunkte und Krümmung (Nullstellen und Vorzeichen von  $f''(x)$ ):

$$\begin{array}{ccc} > & & < & \text{konvex für } x < 0 \\ f''(x) = 0 & \Leftrightarrow & x = 0 \Rightarrow & \text{Wendepunkt } x_W = 0 , f'(0) = 1 \text{ (Anstieg Wendetangente)} \\ < & & > & \text{konkav für } x > 0 \end{array}$$

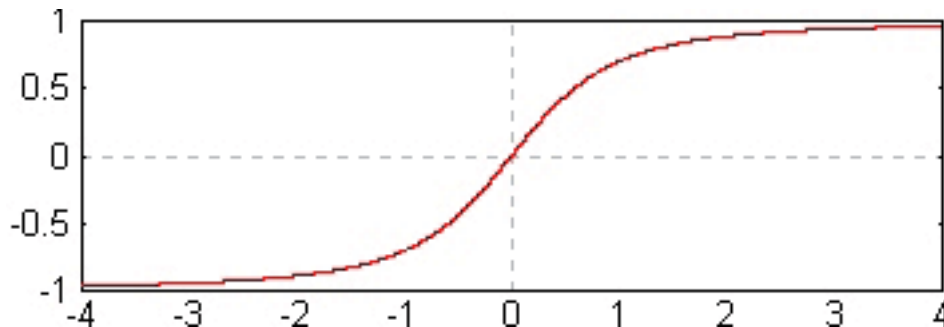
Verhalten an den Grenzen von  $D_f$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{!Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \overset{!Hospital}{=} \dots$$

Regel von L'HOSPITAL führt hier nicht zu Erfolg! Elementare Umformung ergibt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{|x|} = \pm 1$$

Skizze:



Umkehrfunktion:

Wegen  $f'(x) > 0 \forall x \in D_f$  existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  mit  $D_{f^{-1}} = (-1; 1)$  und  $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$  und ist im gesamten Definitionsbereich differenzierbar.

Es gilt  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \left(\sqrt{1+x_0^2}\right)^3$ , wobei  $y_0 = f(x_0)$ . Im Nullpunkt ergibt sich  $f(0) = 0$  und damit  $(f^{-1})'(0) = 1$ .

### 15. Lösungshinweise:

$$y = e^x(b - e^x), \quad b > 0$$

$$\text{Nullstellen: } e^x > 0 \Rightarrow$$

$$y = e^x(b - e^x) = 0 \Leftrightarrow (b - e^x) = 0 \Rightarrow x_N = \ln b$$

Ableitungen:

$$y' = e^x(b - 2e^x), \quad y'' = e^x(b - 4e^x), \quad y''' = e^x(b - 8e^x).$$

$$\text{Extremwerte: } y' = 0 \Leftrightarrow (b - 2e^x) = 0 \Rightarrow x_E = \ln \frac{b}{2}$$

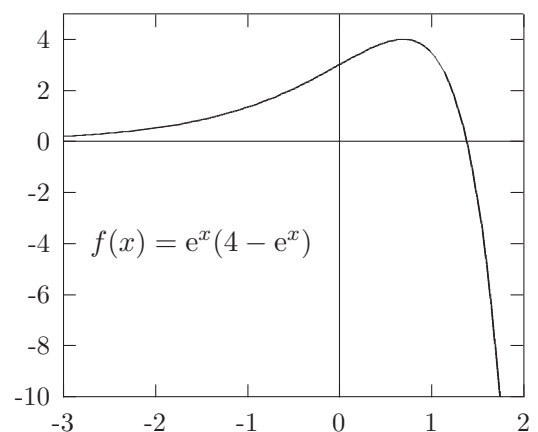
$$y''(\ln \frac{b}{2}) = -\frac{b^2}{2} < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum mit } y_E = \frac{b^2}{4}.$$

$$\text{Wendepunkt: } y'' = 0 \Leftrightarrow (b - 4e^x) = 0 \Rightarrow x_W = \ln \frac{b}{4}$$

$$y'''(\ln \frac{b}{4}) = -\frac{b^2}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt mit } y_W = -\frac{3}{16}b^2 \text{ und } y'(\ln \frac{b}{4}) = \frac{b^2}{8} \text{ (Anstieg Wendetangente).}$$

Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(b - e^x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x(b - e^x) = \infty(-\infty) = -\infty.$$



16. Lösungshinweise:

$$f(x) = \frac{\ln(x-a)}{(x-a)^2}$$

*Bemerkung:*

Die Rechnung läßt sich bezüglich des Schreibaufwandes erheblich verkürzen, wenn man statt  $f(x)$  die Funktion  $g(x) = f(x+a) = \frac{\ln x}{x^2}$  diskutiert und die berechneten  $x$ -Stellen dann um  $a$  längs der  $x$ -Achse „verschiebt“, d.b. zu dem berechneten  $x$ -Wert  $a$  addiert.

**Definitionsbereich :**

Weil das Argument des Logarithmus positiv sein muß, ist  $f(x)$  in  $D_f = (a; \infty)$  definiert (und als Quotient elementarer Funktionen mit positivem Nenner dort überall) *stetig*.

**Symmetrie :** Weder gerade noch ungerade, weil  $f(-x) \neq f(x)$  und  $f(-x) \neq -f(x)$ .

**Ableitungen :**

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x-a}(x-a)^2 - \ln(x-a) \cdot 2(x-a)}{(x-a)^4} = \frac{1 - 2 \ln(x-a)}{(x-a)^3}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{-2}{x-a}(x-a)^3 - (1 - 2 \ln(x-a)) \cdot 3(x-a)^2}{(x-a)^6} = \frac{-5 + 6 \ln(x-a)}{(x-a)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{\frac{6}{x-a}(x-a)^4 - (-5 + 6 \ln(x-a)) \cdot 4(x-a)^3}{(x-a)^8} = \frac{26 - 24 \ln(x-a)}{(x-a)^5}$$

Hinweis für die weitere Rechnung : Wegen  $x > a$  werden Nullstellen und Vorzeichen der Funktion und der Ableitungen bestimmt durch Nullstellen und Vorzeichen des Zählers, weil der Nenner stets positiv ist.

**Nullstellen und Vorzeichen** von  $f(x)$  :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-a) = 0 \Leftrightarrow x-a = e^0 \Leftrightarrow x = 1+a ;$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x-a) > 0 \Leftrightarrow x-a > e^0 \Leftrightarrow x > 1+a ;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x-a) < 0 \Leftrightarrow x-a < e^0 \Leftrightarrow x < 1+a .$$

Damit ist  $f(x)$  *negativ* für  $x \in (a; 1+a)$ , *positiv* für  $x \in (1+a; \infty)$  und besitzt die einzige Nullstelle für  $x_N = 1+a$ .

**Extremwerte und Monotonie** (Nullstellen und Vorzeichen von  $f'(x)$ ) :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln(x-a) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2 \ln(x-a) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \ln(x-a)$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \geq x-a \Leftrightarrow \sqrt{e}+a \geq x .$$

Damit ist klar, daß  $f(x)$  in  $(a; \sqrt{e}+a]$  *monoton wächst*, in  $[\sqrt{e}+a; \infty)$  *monoton fällt* und folglich in  $x_E = \sqrt{e}+a$  ein *relatives (lokales) Maximum* mit dem Funktionswert  $f(\sqrt{e}+a) = \frac{\ln(\sqrt{e}+a-a)}{(\sqrt{e}+a-a)^2} = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e} = \frac{1}{2e}$  besitzt.

Weil in den offenen Intervallen  $(a; \sqrt{e}+a)$  und  $(\sqrt{e}+a; \infty)$  *strenge Monotonie* gegeben ist, besitzt  $f(x)$  in  $x_E$  sein eindeutig bestimmtes *absolutes (globales) Maximum*, insbesondere gilt  $f(x) \leq \frac{1}{2e}$  für alle  $x \in D_f$  (Wertebereich!).

Die Extremstelle läßt sich alternativ auch bestimmen aus der *notwendigen* Bedingung  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e}+a$

und bestätigen mit der *hinreichenden* Bedingung

$$f''(\sqrt{e}+a) = \frac{-5 + 6 \ln(\sqrt{e}+a-a)}{(\sqrt{e}+a-a)^4} = -\frac{2}{e^2} < 0 .$$

**Wendepunkte und Krümmungsverhalten** (Nullstellen, Vorzeichen von  $f''(x)$ ) :

$$\begin{aligned} f''(x) \underset{\geq}{\leq} 0 &\Leftrightarrow -5 + 6 \ln(x-a) \underset{\geq}{\leq} 0 \Leftrightarrow 6 \ln(x-a) \underset{\geq}{\leq} -5 \Leftrightarrow \ln(x-a) \underset{\geq}{\leq} \frac{5}{6} \\ &\Leftrightarrow x-a \underset{\geq}{\leq} e^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow x \underset{\geq}{\leq} \sqrt[6]{e^5} + a . \end{aligned}$$

Damit ist klar, daß  $f(x)$  in  $(a; \sqrt[6]{e^5} + a]$  *konkav* ist, in  $[\sqrt[6]{e^5} + a; \infty)$  *konvex* ist und folglich in  $x_W = \sqrt[6]{e^5} + a$  einen *Wendepunkt* mit dem Funktionswert  $f(\sqrt[6]{e^5} + a) = \frac{\ln(\sqrt[6]{e^5} + a - a)}{(\sqrt[6]{e^5} + a - a)^2} = \frac{\ln e^{\frac{5}{6}}}{e^{\frac{5}{3}}} = \frac{5}{6 \sqrt[3]{e^5}}$  besitzt.

Die Wendestelle läßt sich alternativ auch bestimmen aus der *notwendigen* Bedingung  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{e^5} + a$

und bestätigen mit der *hinreichenden* Bedingung

$$f'''(\sqrt[6]{e^5} + a) = \frac{26 - 24 \ln(\sqrt[6]{e^5} + a - a)}{(\sqrt[6]{e^5} + a - a)^5} = \frac{6}{\sqrt[6]{e^{25}}} > 0 .$$

**Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches :**

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\ln(x-a)}{(x-a)^2} = \left( \frac{-\infty}{0+0} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x-a)}{(x-a)^2} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{\text{Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x-a}}{2(x-a)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(x-a)^2} = 0 + 0$$

**Wertebereich :**

Weil  $f(x) \leq \frac{1}{2e}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  (und  $f(x)$  stetig ist!) gilt für den Wertebereich

$$W_f = \left( -\infty; \frac{1}{2e} \right] .$$

## 17. Lösungshinweise:

a)  $f(x) = x + \sin x$

Nullstellen:

$x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -x \Rightarrow x_N = 0$  ist einzige Nullstelle  
(aus graphischer Überlegung, Schnittpunkt von  $y = \sin x$  mit  $y = -x$ ).

Ableitungen:

$$f'(x) = 1 + \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x .$$

Extremwerte und Monotonie:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} ,$$

Für  $x \neq x_k$  gilt  $\cos x > -1$  und deshalb  $f'(x) > 0$ . Damit ist  $f(x)$  monoton wachsend und besitzt also kein Extremwerte.

Wendepunkte und Krümmung:

Wegen  $f''(x_k) = -\sin(2k+1)\pi = 0$  und  $f'''(x_k) = -\cos(2k+1)\pi = 1 \neq 0$  besitzt  $f(x)$  an den Stellen  $x_k$  Horizontalwendepunkte.

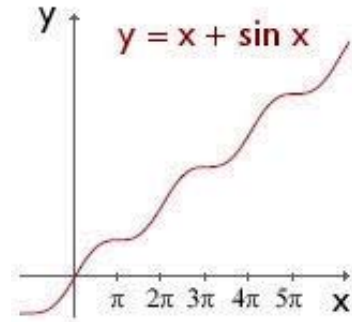
Die  $x_k$  sind nicht die einzigen Nullstellen der 2. Ableitung!  $f''(x) = -\sin x = 0$  gilt auch noch

für  $x_l = 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Dafür ist  $f'''(x_l) = -\cos 2l\pi = -1 \neq 0$ . Auch an diesen Stellen besitzt  $f(x)$  Wendepunkte, hier mit dem Anstieg der Wendetangente von  $f'(2l\pi) = 1 + \cos 2l\pi = 2$ .

Zwischen den Wendepunkten ist  $f(x)$  konvex oder konkav gekrümmt. Auskunft darüber gibt das Vorzeichen der zweiten Ableitung:

$f(x)$  konvex, wenn  $f''(x) = -\sin x > 0$ , wenn also  $\sin x < 0$ ,  
d.h. für  $x \in ((2k-1)\pi; 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

$f(x)$  konkav, wenn  $f''(x) = -\sin x < 0$ , wenn also  $\sin x > 0$ ,  
d.h. für  $x \in (2k\pi; (2k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} \cdot x = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)x}{x + \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \\ (\text{Regel von l'Hospital anwenden}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \cdot x + (1 + \cos x) \cdot 1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### 18. Lösungshinweise:

$$y = \frac{\ln(ax) + 1}{x}, \quad a \neq 0, \quad D_f = (-\infty; 0) \text{ für } a < 0, \quad D_f = (0; \infty) \text{ für } a > 0.$$

Nullstellen:

$$y = \frac{\ln(ax)+1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(ax) = -1 \Rightarrow x_N = \frac{1}{ae}$$

Ableitungen:

$$y' = -\frac{\ln(ax)}{x^2}, \quad y'' = \frac{2\ln(ax)-1}{x^3}, \quad y''' = \frac{5-6\ln(ax)}{x^4}.$$

$$\text{Extremwerte: } y' = 0 \Leftrightarrow \ln(ax) = 0 \Rightarrow x_E = \frac{1}{a}$$

$$y''\left(\frac{1}{a}\right) = -a^3 \Rightarrow \text{lokales Minimum für } a > 0, \\ \text{lokales Maximum für } a < 0, y_E = a.$$

Wendepunkte:

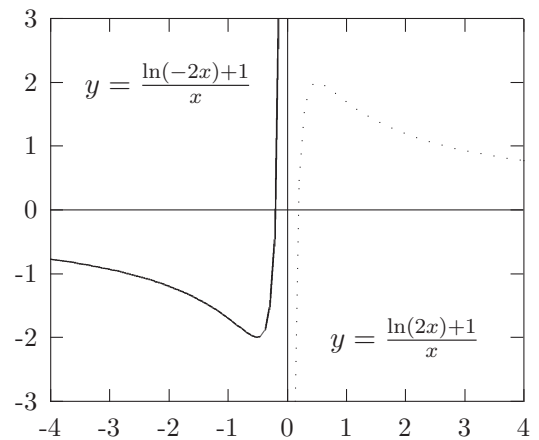
$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2\ln(ax) - 1 = 0 \Rightarrow x_W = \frac{1}{a}\sqrt{e}$$

$$y'''\left(\frac{1}{a}\sqrt{e}\right) = \frac{(5-\ln\sqrt{e})}{e^2} a^4 \neq 0, \text{ Wendepunkt, } y_W = \frac{3}{2} \frac{a}{\sqrt{e}}.$$

Grenzwerte:

$$a < 0: \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0;$$

$$a > 0: \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$



19. Lösungshinweise:

$$f(x) = 1 + \ln \frac{x}{2-x} \quad , \quad f(1) = 1 \quad ; \quad f'(x) = \frac{2}{x(2-x)} \quad , \quad f'(1) = 2 \quad .$$

Argumentwertänderung:  $\Delta x = dx = x - x_0$

Funktionswertänderung:  $\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx dy = f'(x_0) \cdot dx$

$$dx = 0,1 \quad \Rightarrow \quad dy = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \quad , \quad \Delta y = f(1,1) - f(1) = \ln \frac{1,1}{0,9} \approx 0,20067$$

$$dx = 0,5 \quad \Rightarrow \quad dy = 2 \cdot 0,5 = 1,0 \quad , \quad \Delta y = f(1,5) - f(1) = \ln \frac{1,5}{0,5} = \ln 3 \approx 1,09861$$

$$dx = 0,9 \quad \Rightarrow \quad dy = 2 \cdot 0,9 = 1,8 \quad , \quad \Delta y = f(1,9) - f(1) = \ln \frac{1,9}{0,1} = \ln 19 \approx 2,94444$$

20. Lösungshinweise:

$$V = \frac{\pi}{6} d^3 \quad , \quad V' = \frac{\pi}{2} d^2 \quad , \quad |\Delta d| \leq 0,1 \text{ cm} \quad .$$

$$\text{absoluter Fehler: } |\Delta V| \approx |dV| = |V'| \cdot |\Delta d| \leq \frac{\pi}{2} \cdot 50^2 \cdot 0,1 = 392,70 \text{ cm}^3$$

$$\text{relativer Fehler: } \left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \left| \frac{dV}{V} \right| = \frac{3}{d} \cdot |\Delta d| \leq 0,006 \quad ; \quad \text{prozentualer Fehler: } 0,6 \text{ \%} \quad .$$