Elementare Funktionen **(Lösungshinweise)**

1. **Lösungshinweise:**

   a) Funktion; auch für $|x| = 1$ wegen $x^2 - 1 = 1 - x^2 = 0$ eindeutig bestimmte Werte $y(-1) = y(1) = 0$.
   b) keine Funktion; nicht eindeutig z.B. für durch 6 teilbaren Zahlen.
   c) keine Funktion; $y = -x$ und $y = x + 2\alpha$ erfüllen die Gleichung, sind jedoch für $x \neq -\alpha$ verschieden.
   d) Funktion.

2. **Lösungshinweise:**

   a) $f(x) = x^2 - x$,
   $f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) = (x+1)((x+1)-1) = x^2 + x = (-x)^2 - (-x) = f(-x)$;

   b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$,

   $$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1-x}{1+x} = -f(x) \ , \ f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \frac{-1-x}{-1+x} = -\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{f(x)} \ ;$$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f\left(\dfrac{ab}{a-b}\right) = \dfrac{a-b}{ab} = \dfrac{a}{ab} - \dfrac{b}{ab} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a} = f(b) - f(a)$.

3. **Lösungshinweise:**

   a) $y = x\sqrt{x^2} - x^2 = x|x| - x^2 = \begin{cases} 0 \ , & x \geq 0 \ , \\ -2x^2 \ , & x < 0 \ . \end{cases}$ $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = (-\infty; 0]$, monoton wachsend.

   b) Aus $4x - x^2 \geq 1$ folgt $D(f) = [2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$, $W(f) = [0; \sqrt{\ln 4}]$, beschränkt.

   c) Aus $x^2 - 4 \geq 0$ folgt $D(f) = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.
   Für $x \in (-\infty; -2]$ gilt $y \in (-\infty; -4]$ und ist monoton wachsend. Man sieht das z.B. an der Darstellung $y = (x - 2) + (-\sqrt{x^2 - 4})$, denn beide Summanden werden dafür am größten bei $x = -2$ und fallen unbeschränkt für *abnehmendes* x.
   Für $x \in [2; \infty)$ gilt $y \in (-2; 0]$ und ist monoton fallend. Man sieht das z.B. an der Darstellung $y = \dfrac{(x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4})}{x + \sqrt{x^2 - 4}} - 2 = \dfrac{4}{x + \sqrt{x^2 - 4}} - 2$, denn der Nenner wird am kleinsten bei $x = 2$ und wächst unbeschränkt für *zunehmendes* x.

   d) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 1]$. Für $x \in (-\infty; 0)$ gilt $2 + \sqrt{1 - x} > 3$, damit $-\infty < y < \frac{3}{x} < 0$; für $x \in (0; 1]$ gilt $2 \leq 2 + \sqrt{1 - x} < 3$, damit $2 \leq \frac{2}{x} \leq y < \frac{3}{x} < \infty$. Damit ist $W(f) = (-\infty; 0) \cup [2; \infty)$.

   e) $D(f) = [-1; 1]$, $W(f) = [0; 1]$ (oberer Halbkreis); *gerade* Funktion.

   f) $D(f) = (-1; 1)$, $W(f) = [1; \infty)$ (reziprok zu f aus e).

   g) $y = \sqrt{1 - |x|} = \begin{cases} \sqrt{1 - x} = \sqrt{-(x - 1)} \ , & x \geq 0 \ , \\ \sqrt{1 + x} \ , & x < 0 \ . \end{cases}$ $D(f) = [-1; 1]$, $W(f) = [0; 1]$.

   h) Aus $x \neq 0$ und $\ln|x| \neq 1$ folgt $D(f) = \mathbb{R} \backslash \{-e; 0; e\}$. Wegen $1 - \ln|x| \in \mathbb{R}$ gilt $W(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

4. **Lösungshinweise:**

   a) $y = \cos^2 3x + 1$: $D(f) = R$; $0 \le |\cos 3x| \le 1 \Rightarrow 1 \le \cos^2 3x + 1 \le 2 \Rightarrow W(f) = [1;2]$. Periode $\frac{\pi}{3}$, denn $\cos^2\alpha = |\cos\alpha|^2$ ist periodisch mit π und folglich erhält man $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \cos^2(3x + \pi) + 1 = \cos^2 3x + 1 = f(x)$.

   b) $y = (\cos 3x + 1)^2$: $D(f) = R$; $0 \le \cos 3x + 1 \le 2 \Rightarrow 0 \le (\cos 3x + 1)^2 \le 4 \Rightarrow W(f) = [0;4]$. Periode $\frac{2}{3}\pi$, denn $(\cos 3x + 1)^2 = \cos^2 3x + 2\cos 3x + 1$, analog zu a) ist zwar $\cos^2 3x$ periodisch mit $\frac{\pi}{3}$, jedoch $\cos 3x = \cos(3x + 2\pi) = \cos 3\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$ erst periodisch mit $\frac{2}{3}\pi$.

   c) $y = \ln(2\sin^2 x + 1)$: $D(f) = R$; $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2\sin^2 x + 1 \le 3 \Rightarrow \ln 1 \le \ln(2\sin^2 x + 1) \le \ln 3 \Rightarrow W(f) = [0; \ln 3]$. Die Periode π wird bestimmt durch $\sin^2 x$.

5. **Lösungshinweise:**

   a) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ ist im Vergleich zu $y = \sin x$ um $\frac{\pi}{2}$ in Richtung der positiven x-Achse verschoben und entspricht damit $y = -\cos x$.

   b) Bei $y = |\sin(x - \frac{\pi}{2})|$ werden zusätzlich zu der Verschiebung bei a) die Bögen mit negativen Funktionswerten an der y-Achse gespiegelt.

   c) $y = \sin|x - \frac{\pi}{2}|$ entsteht aus Verschiebung von $\sin|x|$ um $\frac{\pi}{2}$ in Richtung der positiven x-Achse. Für $y = \sin|x|$ selbst gilt dabei $\sin|x| = \sin x$ für $x \ge 0$ und $\sin|x| = \sin(-x)$ für $x < 0$, der Ast für $x < 0$ ist die Spiegelung des Astes für $x > 0$ an der y-Achse.

   d) $y = \sin 2x$ ergibt für den halben Argumentwert den gleichen Funktionswert wie $y = \sin x$, bedeutet also eine „Stauchung“ von $\sin x$ um den Faktor 2 bezüglich der x-Achse. $y = \sin 2x$ ist deshalb periodisch mit π.

   e) $y = 2\sin 2x$ ist verlichen mit $y = \sin 2x$ längs der y-Achse um den Faktor 2 „gestreckt“, weil alle Funktionswerte verdoppelt werden.

   f) $y = \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ ist verglichen mit $\sin x$ um den Faktor 2 „gestreckt“ und zusätzlich um $\frac{1}{2}$ in Richtung der negativen y-Achse verschoben.

6. **Lösungshinweise:**

   a) $\varphi(x) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 2k\pi \le x \le (2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x \in \mathbb{R}$;

7. **Lösungshinweise:**

   a) $\tan(2x + 2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad x_k = -1 + \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, k ganzzahlig.

   b) $(4\cos^2 x - 1)\sin x = 1$

   Ersetzt man $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ und substituiert anschließend $z = \sin x$, so erhält man die Gleichung $-4z^3 + 3z - 1 = 0$. Eine Nullstelle ist offensichtlich $z_1 = -1$. Nach Abspalten des Linearfaktors $(z+1)$ durch Polynomendivision erhält man $(-4z^3 + 3z - 1) : (z+1) = -4z^2 + 4z - 1 = -(2z-1)^2 = 0$ und damit die weiteren Nullstellen $z_{2,3} = \frac{1}{2}$. Rücksubstutition ergibt die Gleichung $\sin x = -1$ mit den Lösungen $x_{1,k} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, k ganzzahlig, und die Gleichung $\sin x = \frac{1}{2}$ mit den Lösungen $x_{2,k} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ und $x_{3,k} = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$. Die Lösungen lassen sich zu einer Darstellung zusammenfassen, $x_k = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$, k ganzzahlig .

   c) $\mathrm{e}^{x^2 - 2\sqrt{x^2}} - \frac{1}{e} = 0$

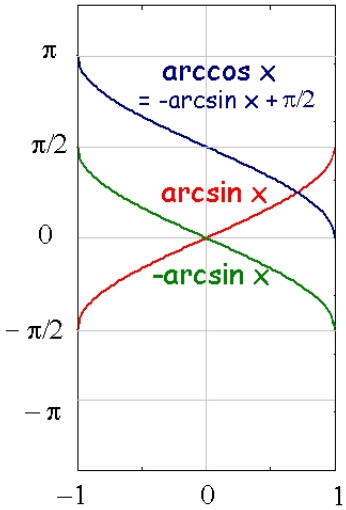
   $\mathrm{e}^{x^2 - 2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{e}$, $x^2 - 2\sqrt{x^2} = -1$, $x^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2 = 0$, $|x| - 1 = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$.

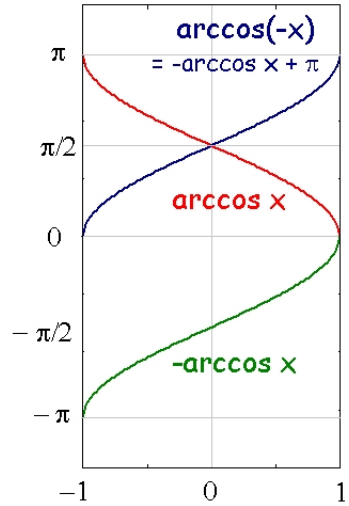
8. **Lösungshinweise:**

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \Leftrightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$

b) $\arccos(-x) + \arccos x = \pi \Leftrightarrow \arccos x = \pi - \arccos(-x)$

$\Leftrightarrow x = (\cos \pi - \arccos(-x)) = -\cos(\arccos(-x)) = -(-x) = x$





9. **Lösungshinweise:**

a) $y = f(x) = x\sqrt{x^2} = x\,|x| = \begin{cases} x^2 , & x \geq 0 , \\ -x^2 , & x < 0 . \end{cases}$ Wegen der bekannten Eigenschaften der Normalparabel ist $f(x)$ für alle reellen x definiert, streng monoton wachsend und nimmt alle rellen y als Werte an. Die Umkehrfunktion läßt sich in zwei Teilschritten bestimmen:

1. Für $x \geq 0$ gilt $y = \ x^2 \geq 0$ und daraus folgt $x = \sqrt{y}$ als Umkehrung;

2. Für $x < 0$ gilt $y = -x^2 < 0$ und damit bekommt man $-y = x^2$, $\sqrt{-y} = \sqrt{x^2} = |x| = -x$, also die Umkehrung $x = -\sqrt{-y}$.

Nach Vertauschung der Variablen erhält man (zusammengefaßt) für die Umkehrfunktion

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x \geq 0 , \\ -\sqrt{-x} & , \quad x < 0 . \end{cases}$$

b) Wegen der auftretenden Wurzeln ist $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ definiert für $x \geq 1$, der (maximale) Definitionsbereich ist also $D_f = [1; \infty)$.

Als Summe streng monotoner wachsender (Wurzel-)Funktionen ist $f(x)$ selbst streng monoton wachsend und auf ganz D_f deshalb auch umkehrbar. Aus der Monotonie folgt für den Wertebereich der Funktion $W_f = [\, f(1); \lim\limits_{x \to \infty} f(x)\,) = [\sqrt{2}; \infty\,)$.

Die Umkehrfunktion f^{-1} mit $D_{f^{-1}} = W_f = [\sqrt{2}; \infty\,)$ und $W_{f^{-1}} = D_f = [1; \infty)$ erhält man durch Auflösen von $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ nach x (Wurzelgleichung in x, zweimal „Wurzel separieren und quadrieren“), das ergibt $x = f^{-1}(y) = \frac{y^4+4}{4y^2} = \frac{y^2}{4} + \frac{1}{y^2}$. Nach Vertauschung der Variablen erhält man schließlich für die Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}$.

Bemerkung:
$D_{f^{-1}} = W_f = [\sqrt{2}; \infty\,)$ ist **nicht** der **maximale** Definitionsbereich von $y = g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}$ aber nur dort ist das die gesuchte Umkehrfunktion.

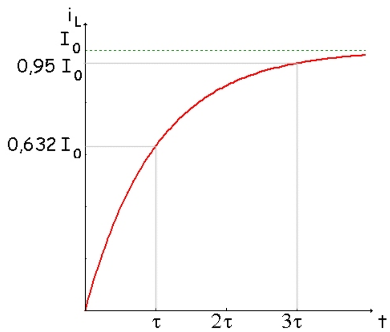
10. **Lösungshinweise:**

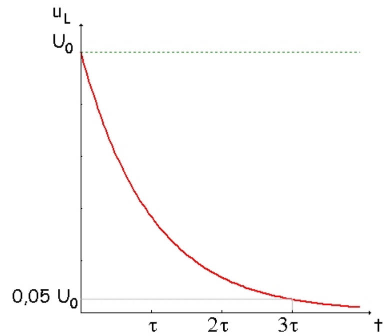
$i_L(t) = I_0\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \Rightarrow \quad i_L(\tau) = I_0\,(1 - e^{-1}) \approx 0{,}632\, I_0$, also ca. 63% des Endwertes I_0 .

Die Stromstärke erreicht 95% des Endwertes, wenn

$I_0\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0{,}95\, I_0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - 0{,}95 = \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad t = \tau \ln 20 \approx 3\tau$.

Die Selbstinduktionsspannung fällt sinkt demnach auf $u(\tau \ln 20) = 0{,}05\, U_0$.





11. **Lösungshinweise:**

a) $x(t) = 1 + t \in \mathbb{R}$, $\quad y(t) = 1 + t^2 \geq 1$, $\quad$ parameterfreie Form $\quad y = 1 + (x-1)^2$ für $x \in \mathbb{R}$,

eine Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(1;1)$, wird „von links nach rechts“ durchlaufen.

b) $x(t) = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2 \geq 2$, $\quad y(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \geq 0$,
parameterfreie Form: $\quad y - x = -2$ bzw. $y = x - 2$ für $x \geq 2$, ein von $Q(2;0)$ ausgehender Strahl (Halbgerade) mit Anstieg 1 , wird doppelt durchlaufen, für t von $-\infty$ bis 1 bewegt sich $P(x,y)$ auf Q zu, „wendet“ (für $t = 1$) in Q und durchläuft die Halbgerade für t von 1 bis $+\infty$ ein zweites Mal.

c) $x(t) = \cos 2t \in [-1;1]$, $\quad y(t) = \sin^2 t \in [0;1]$,
parameterfreie Form: $\quad x = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2y$ für $y \in [0;1]$
bzw. $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ für $x \in [-1;1]$, die Strecke (Geradenstück) zwischen $R(-1;1)$ und $T(1;0)$. $P(x,y)$ bewegt sich darauf zwischen R und T „hin und her“, befindet sich z.B. bei $t = 0$ in T, durchläuft für $t = \frac{\pi}{4}$ den Punkt $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ auf der y-Achse, „wendet“ für $t = \frac{\pi}{2}$ in R und bewegt sich wieder zurück auf T zu, der für $t = \pi$ erreicht wird.

d) $x(t) = \cos 2t \in [-1;1]$, $\quad y(t) = \sin t \in [-1;1]$,
parameterfreie Form: $\quad x = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2y^2$ für $y \in [-1;1]$
oder $y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ für $x \in [-1;1]$; das liegende, nach links offene Parabelstück mit den Endpunkten $R(-1;1)$, $T(-1;-1)$ und dem Scheitel $S(1;0)$. $P(x,y)$ bewegt sich darauf zwischen R und T „hin und her“, befindet sich z.B. bei $t = 0$ in S, durchläuft für $t = \frac{\pi}{4}$ die y-Achse im Punkt $(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$, „wendet“ für $t = \frac{\pi}{2}$ in R und bewegt sich wieder zurück durch S $(t = \pi)$ auf T zu, der für $t = \frac{3}{2}\pi$ erreicht wird. Bei $t = 2\pi$ wird schließlich wieder der Scheitelpunkt S durchlaufen.

12. **Lösungshinweise:**

Schnittpunkte $(0;0)$ und $(2a;0)$ des Kreises mit der x-Achse und Punkt $P(x;y)$ auf dem Kreisumfang bilden ein rechtwinkliges Dreieck (Satz des THALES). Damit erhält man $\cos\varphi = \dfrac{r}{2a}$ bzw. $r = 2a\cos\varphi$ als Darstellung des Kreises in Polarkoordinaten. Als eine Parameterdarstellung findet man damit
$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi = 2a\cos^2\varphi$ und $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi = 2a\cos\varphi\sin\varphi = a\sin 2\varphi$ mit $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

13. **Lösungshinweise:**

Aus der *Polarkoordinaten*-Darstellung $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2)$, ergibt sich eine *Parameterdarstellung* $x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$.

a) Kardioide:

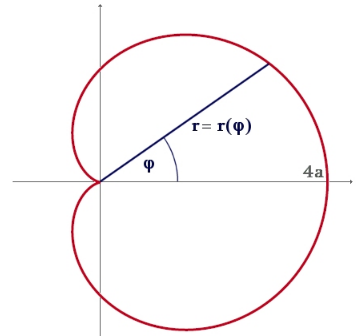
$r = 2a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $a > 0$.

$r(0) = 2a$, $r(\varphi)$ fällt mit wachsendem φ bis $r(\pi) = 0$ und wächst dann wieder bis $r(2\pi) = 2a$.

Parameterdarstellung:

$x = 2a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$,

$y = 2a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi)$.



Kardioide
r = 2a (1 + cos φ) , (a >0)

b) Archimedische Spirale:

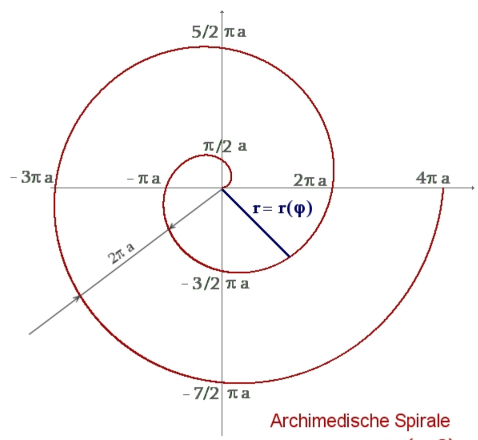
$r = a\,\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi\,k]$, $a > 0$ (k Umläufe)

$r(0) = 0$, r wächst proportional mit φ , vom Ursprung ausgehende Strahlen schneiden die Spirale in konstanten Abständen $r(\varphi + 2\pi) - r(\varphi) = 2\pi\,a$.

Parameterdarstellung:

$x = a\varphi\cos\varphi$,

$y = a\varphi\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi\,k]$.



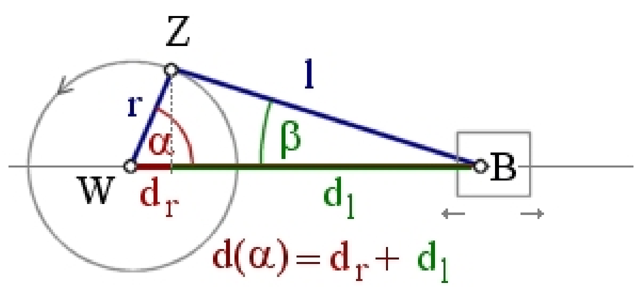
Archimedische Spirale
r = a φ , φ ≥ 0 (a>0)

14. **Lösungshinweise:**

Seien $d_r = r\cos\alpha$ bzw. $d_l = l\cos\beta$ die Projektionen der Schubstangenlänge l bzw. der Kurbellänge r auf die Waagerechte ($d_r < 0$ für $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$!).

Der Abstand $d(\alpha)$ ist dann gerade die Summe $d_l + d_r$ dieser Projektionen (Hilfsgrößen und Bezeichnungen siehe Skizze)

$d(\alpha) = d_r + d_l = r\cos\alpha + l\cos\beta$.



Nach dem Sinussatz gilt im Dreieck $\triangle\, WBZ$, dass $\dfrac{r}{\sin\beta} = \dfrac{l}{\sin\alpha}$, also $\sin\beta = \dfrac{r}{l}\sin\alpha$.

Wegen $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}$ findet man schließlich

$$d(\alpha) = r\cos\alpha + l\sqrt{1 - \sin^2\beta} = r\cos\alpha + l\sqrt{1 - \left(\tfrac{r}{l}\sin\alpha\right)^2} = r\cos\alpha + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha} \quad .$$

15. **Lösungshinweise:**

a) $x = \ (l-d)\cos\alpha \ \ , \ y = \ d\sin\alpha \ , \ \alpha \in [0; 2\pi] \ \ .$

b) $\dfrac{x}{l-d} = \cos\alpha \ , \ \dfrac{y}{d} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{(l-d)^2} \ + \ \dfrac{y^2}{d^2} = 1 \ .$

Die Bahnkurve ist also eine *Ellipse*, speziell für $d = \frac{l}{2}$ ergibt sich der *Kreis* $x^2 \ + \ y^2 = d^2$.