Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Funktionenreihen (Lösungen)

1. **Lösungshinweise:**

a) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$

b) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$.

$x = \frac{1}{2}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2n-1)} = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}$. Wegen $\frac{1}{n-\frac{1}{2}} > \frac{1}{n}$ ist harmonische Reihe *divergente* Minorante.

$x = -\frac{1}{2}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2(2n-1)}$ *konvergiert* nach LEIBNIZ-Kriterium für alternierende Reihen.

c) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *nirgends* konvergent.

d) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, *beständig* konvergent.

2. **Lösungshinweise:**

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-\pi)^k}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k(k+1)} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k$

$r = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{2}$.

Konvergent für $|x-\frac{\pi}{2}| < \frac{1}{2}$, d.b. $\frac{\pi-1}{2} < x < \frac{\pi+1}{2}$.

Randpunkte: $x = \frac{\pi+1}{2}$ bzw. $2x-\pi = 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + - \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$$

$x = \frac{\pi-1}{2}$ bzw. $2x-\pi = -1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ konvergiert nach LEIBNIZ-Kriterium.

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = \frac{(-1)^k}{2^k(2k-1)}$, $n = 2k-1$, $a_n = 0$, $n = 2k$,

$r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ nicht anwendbar.

Direkte Anwendung des Quorientenkriteriums auf die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ ergibt:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{2^{k+1}(2k+1)} \cdot \frac{2^k(2k-1)}{|x|^{2k-1}} = \frac{|x|^2}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{|x|^2}{2} < 1 \quad \text{für} \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} .$$

Randpunkte

$x = \sqrt{2}$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(\sqrt{2})^{2k-1}}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}(2k-1)}$; $x = -\sqrt{2}$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(-\sqrt{2})^{2k-1}}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{2}(2k-1)}$.

Beide Reihen sind konvergent nach dem LEIBNIZ-Kriterium für alternierende Reihen.
Der Konvergenzbereich der Reihe ist also $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{k+3} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k+3} \left(x+\frac{1}{2}\right)^k$

$r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+3} \cdot \frac{n+4}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4}{n+3} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ *konvergent* für $|x + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ d.b. $-1 < x < 0$, *divergent* für $|x + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$.

Randpunkte des Konvergenzbereiches:

$x = 0 : \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+3} = \sum\limits_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \Rightarrow$ *divergent* , harmonische Reihe.

$x = -1 : \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+3}$ *konvergiert* nach LEIBNIZ-Kriterium für alternierende Reihen.

Konvergenzbereich: $-1 \leq x < 0$.

Lösungsvariante: Anwendung Quotientenkriterium auf die Ausgangsreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2x+1)^{n+1}}{n+4} \cdot \frac{n+3}{(2x+1)^n}\right| = |2x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+4} = |2x+1| \overset{!}{<} 1$$

$\Rightarrow$ *konvergent* für $|x + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, *weiter, wie oben ...*

3. **Lösungshinweise:**

$f(x) = \cos^2 x$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$,

$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x$, $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$; $f''(x) = -2\cos 2x$, $f''(\frac{\pi}{4}) = 0$,

$f'''(x) = 4\sin 2x$, $f'''(\frac{\pi}{4}) = 4$; $f^{(4)}(x) = 8\cos 2x$, $f^{(4)}(\frac{\pi}{4}) = 0$, ... ,

$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^k\, 2^{2k-2} \sin 2x$, $f^{(2k-1)}(\frac{\pi}{4}) = (-1)^k\, 4^{k-1}$,

$f^{(2k)}(x) = (-1)^k\, 2^{2k-1} \cos 2x$, $f^{(2k)}(\frac{\pi}{4}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^{k-1}}{(2k-1)!} (x - \tfrac{\pi}{4})^{(2k-1)} = \frac{1}{2} - (x - \tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{2}{3}(x - \tfrac{\pi}{4})^3 - + \ldots .$$

4. **Lösungshinweise:**

$y^{(k)}(x)$	$y^{(k)}(x_0)$	$a_k = \dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$
$y = (x+1)\sinh x$	$y(0) = 0$	$a_0 = 0$
$y' = \sinh x + (x+1)\cosh x$	$y'(0) = 1$	$a_1 = 1$
$y'' = 2\cosh x + (x+1)\sinh x$	$y''(0) = 2$	$a_2 = 1$
$y''' = 3\sinh x + (x+1)\cosh x$	$y'''(0) = 1$	$a_3 = \frac{1}{6}$
$y^{(4)} = 4\cosh x + (x+1)\sinh x$	$y^{(4)}(0) = 4$	$a_4 = \frac{1}{6}$
$\vdots$		
$y^{(2l-1)} = (2l-1)\sinh x + (x+1)\cosh x$	$y^{(2l-1)}(0) = 1$	$a_{2l-1} = \frac{1}{(2l-1)!}$
$y^{(2l)} = (2l)\cosh x + (x+1)\sinh x$	$y^{(2l)}(0) = 2l$	$a_{2l} = \frac{1}{(2l-1)!}$

$$(x+1)\sinh x = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2l-1)!}x^{2l-1} + \frac{1}{(2l-1)!}x^{2l} + \ldots$$

5. **Lösungshinweise:**

$y^{(k)}(x)$	$y^{(k)}(x_0)$	$a_k = \dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$
$y = \dfrac{2}{2-x}$	$y(0) = 1$	$a_0 = 1$
$y' = -\dfrac{2}{(2-x)^2} \cdot (-1) = \dfrac{2}{(2-x)^2}$	$y'(0) = \dfrac{1}{2}$	$a_1 = \dfrac{1}{2}$
$y'' = -2\,\dfrac{2}{(2-x)^3} \cdot (-1) = 2 \cdot \dfrac{2}{(2-x)^3}$	$y''(0) = \dfrac{1}{2}$	$a_2 = \dfrac{1}{4}$
$y''' = 2 \cdot (-3)\,\dfrac{2}{(2-x)^4} \cdot (-1) = 2 \cdot 3\,\dfrac{2}{(2-x)^4}$	$y'''(0) = \dfrac{3}{4}$	$a_3 = \dfrac{1}{8}$
$y^{(4)} = 2 \cdot 3 \cdot 4\,\dfrac{2}{(2-x)^5}$	$y^{(4)}(0) = 4! \cdot \dfrac{2}{2^5}$	$a_4 = \dfrac{1}{2^4}$
$y^{(k)} = k!\,\dfrac{2}{(2-x)^{k+1}}$	$y^{(k)}(0) = k! \cdot \dfrac{2}{2^{k+1}}$	$a_k = \dfrac{1}{2^k}$

$$\frac{2}{2-x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \ldots + \frac{1}{2^k}x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, x^k$$

Konvergenzradius: $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 2$;

$x = 2 \;:\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} 1^k = \infty \quad$ (*bestimmt* divergent) ;

$x = -2 \;:\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \quad$ (*unbestimmt* divergent) . $\qquad \Rightarrow \quad$ Reihe konvergent für $|x| < 2$.

Lösungsvariante: Bekannt ist die *geometrische* Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \dfrac{1}{1-q}$,

damit findet man $\dfrac{2}{2-x} = \dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}\, x^k$.

6. **<u>Lösungshinweise:</u>**

$y^{(n)}(x)$	$y^{(n)}(x_0)$	$a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$
$y = \sinh^2 x + 1$	$y(0) = 1$	$a_0 = 1$
$y' = 2\sinh x \cosh x$		
$= \sinh 2x$	$y'(0) = 0$	$a_1 = 0$
$y'' = 2\cosh 2x$	$y''(0) = 2$	$a_2 = \frac{2}{2!} = 1$
$y''' = 4\sinh 2x$	$y'''(0) = 0$	$a_3 = 0$
$y^{(4)} = 8\cosh 2x$	$y^{(4)}(0) = 8$	$a_4 = \frac{8}{4!} = \frac{1}{3}$
$y^{(5)} = 16\sinh 2x$	$y^{(5)}(0) = 0$	$a_5 = 0$
$y^{(6)} = 32\cosh 2x$	$y^{(6)}(0) = 32$	$a_6 = \frac{32}{6!} = \frac{2}{45}$
$\vdots$		
$y^{(2k-1)} = 2^{2k-2}\sinh 2x$	$y^{(2k-1)}(0) = 0$	$a_{2k-1} = 0$
$y^{(2k)} = 2^{2k-1}\cosh 2x$	$y^{(2k)}(0) = 2^{2k-1}$	$a_{2k} = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}$
		$k = 1, 2, \ldots$

(a) $$\sinh^2 x + 1 = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \ldots$$

(b) $$a_0 = 1 \quad , \quad a_{2k-1} = 0 \quad , \quad a_{2k} = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

(c) $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

$$\sinh^2 x + 1 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - \underbrace{2\,e^x e^{-x}}_{=2} + e^{-2x}\right) + 1 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2x)^n\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\left(1 + (-1)^n\right) x^n\right) + \frac{1}{2}$$

(Koeffizienten verschwinden für ungeradzahlige $n = 2k - 1$)

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \cdot 2 \cdot x^{2k}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + \frac{1}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\, x^{2k}$$

7. **Lösungshinweise:**

a) $\ln(1-x)=\ln(1+(-x))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right)\ ,\ -1<(-x)\le 1;$

$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}+1\right)\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\,x^{2k-1}}{2k-1}$

$\qquad=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)\ ,\ -1<x<1\ .$

b) Man setze in der unter a) bestimmten Reihe $x=\frac{a-b}{a+b}$. Für $a,b>0$ gilt dann $\left|\frac{a-b}{a+b}\right|<1$, x liegt also im Konvergenzbereich und weiter gilt $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{1+\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a-b}{a+b}}=\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$.

8. **Lösungshinweise:**

$f(x)=\ln\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}=\ln x-2x\ ,\quad f'(x)=\frac{1}{x}-2\ ,\quad f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\ ,\quad n\ge 2\ .$

$f(x)=-2-(x-1)+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k\quad .$

Herleitung aus der Reihe für $\ln(1+x)$:

$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\ ,\quad -1<x\le 1\quad\Rightarrow\quad \ln x=\ln(1+(x-1))$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-+\ldots\ ,\quad -1<x-1\le 1\ ,$

$f(x)=\ln x-2x=\ln x-2(x-1)-2$

$\qquad=-2-(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-+\ldots\ ,\quad 0<x\le 2\ .$

9. **Lösungshinweise:**

Taylorpolynom 3.Grades in $x_0=1$: $\quad p_3(x)=3+(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{8}(x-1)^3$

Näherung für $x=0,984\quad\Rightarrow\quad x-1=-0,016=-2^4\cdot 10^{-3}$

$K(0,984)\approx p_3(0,984)=3-\frac{16}{10^3}-\frac{64}{10^6}-\frac{512}{10^9}=3-0,016064512=2,983935488\quad .$

Taschenrechner: $K(0,984)=1+2\sqrt{0,984}\approx 2,9839355\quad .$

10. **Lösungshinweise:**

a) $f(x)=\frac{1}{1+x}\ ,\quad x_0=0\ ;\quad f^{(k)}(x)=(-1)^k\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}\ ,\quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!}=(-1)^k\ ,\quad k=0,1,2,...$

$\quad f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3+x^4-+\ldots$

b) $p_4(x)=1-x+x^2-x^3+x^4\ ,\quad p_4(0,1)=0,9091$ (zum Vergleich: $f(0,1)=0,\overline{90}$)

Restgliedabschätzung:

$|R_4(0,1)|=\left|\frac{f^{(5)}(\vartheta)}{5!}(0,1)^5\right|=\left|(-1)^5\frac{(0,1)^5}{(1+\vartheta)^6}\right|=10^{-5}\frac{1}{(1+\vartheta)^6}<10^{-5}\ ,\quad$ weil $\vartheta\in(0;0,1)$.

c) $\frac{1}{1+x}=\frac{d}{dx}\ln(1+x)=\frac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}\quad .$

d) Substitution $x=t^2$ in die Reihe für $\frac{1}{1+x}$ liefert: $\frac{1}{1+t^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2(n-1)}$. Damit

$\arctan x=\int\limits_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x(-1)^{n-1}t^{2(n-1)}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n-1}\Big|_0^x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\ .$

11. **Lösungshinweise:**

Bekannt ist $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (mit Konvergenzradius $r = \infty$) .

Substitution $x = -t^2$ liefert $e^{-t^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$, gliedweise Integration ergibt

$$\int\limits_0^1 e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^1 (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)k!}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - + \ldots$$

Für die Partialsummen gilt:

$s_0 = 1$, $s_1 = 1 - \frac{1}{3} = 0,6667$, $s_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = 0,7667$, $s_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = 0,7475$
$s_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0,7467$.

Bemerkung zur Genauigkeit: Die Folge $\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$ der Reihenglieder ist alternierend mit monoton fallenden Beträgen. Für die Partialsummen s_n sind die (Teil-)Folgen s_{2k} monoton fallend und s_{2k+1} monoton wachsend mit $s_{2k+1} < s < s_{2k}$, wobei s die gesuchte Reihensumme ist. Es gilt $s = s_n + \Delta s$ mit dem Fehler $|\Delta s| < |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$.

12. **Lösungshinweise:**

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & -\pi < x \le 0 \\ -\frac{2}{\pi}x + 2\,, & 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad\qquad F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} 1\, dx + \int\limits_{0}^{\pi} \left(-\frac{2}{\pi}x + 2 \right) dx \right) = 2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} \cos kx\, dx + \int\limits_{0}^{\pi} \left(-\frac{2}{\pi}x + 2 \right) \cos kx\, dx \right) = \frac{2}{\pi^2 k^2} (1 - \cos k\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi^2 k^2}\,, & k = 2l - 1 \\ 0\,, & k = 2l \end{cases} \,, \; l = 1, 2, \ldots \,. \qquad \text{(partielle Integration beim zweiten Integral)}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} \sin kx\, dx + \int\limits_{0}^{\pi} \left(-\frac{2}{\pi}x + 2 \right) \sin kx\, dx \right) = \frac{1}{\pi k} (1 + \cos k\pi)$$

$$= \begin{cases} 0\,, & k = 2l - 1 \\ \dfrac{2}{\pi k}\,, & k = 2l \end{cases} \,, \; l = 1, 2, \ldots \,.$$

$$F(x) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2 (2l-1)^2} \cos (2l-1)x + \frac{1}{\pi l} \sin 2lx \right)$$

13. **Lösungshinweise:**

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}\,, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ -x\,, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}\,, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

ist offensichtlich ungerade, besitzt also eine reine Sinus-Reihe:

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\;\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}-x\sin kx\;\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{\pi}{2}\sin kx\;\mathrm{d}x\right)=-\frac{2}{\pi k^2}\sin k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k}\cos k\pi$$

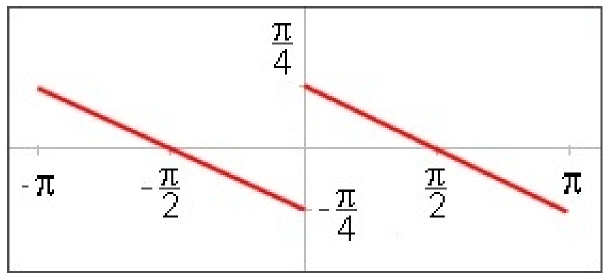
$$F(x)=\left(-\frac{2}{\pi}-1\right)\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\left(\frac{2}{9\pi}-\frac{1}{3}\right)\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\left(-\frac{2}{25\pi}-\frac{1}{5}\right)\sin 5x\;+\;\ldots$$

14. **Lösungshinweise:**

a) $f(x)$ ist offensichtlich *ungerade*, in der Reihenentwicklung

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos kx+b_k\sin kx\}$$

gilt $a_k=0\;,\quad k=0,1,\ldots\;.$



$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin kx\;\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{-\cos kx}{k}\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{k\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos kx\;\mathrm{d}x}_{=0}$$

$$=\frac{\cos k\pi+1}{2k}=\frac{(-1)^k+1}{2k}=\begin{cases}0 & ,\;k=2l-1\\ \frac{1}{k} & ,\;k=2l\end{cases}\quad l=1,2,\ldots$$

$$\Rightarrow\quad F(x)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2l\,x)}{2l}$$

b) $F(0)=0\;,$ berechnet aus der Reihe bzw. wegen $F(0)=\dfrac{f(+0)+f(-0)}{2}\;.$

$F(0)\neq f(0)=-\frac{\pi}{4}\;,$ Sprungstelle von $f(x)\;.$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}\;,$ Stetigkeitspunkt von $f(x)\;.$

c) $$\frac{\pi}{8}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2l\,\frac{\pi}{4})}{2l}\quad\Rightarrow\quad\frac{\pi}{4}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(l\,\frac{\pi}{2})}{l}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-+\ldots=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}}{2l-1}$$

15. **Lösungshinweise:**

$f(x)$ ist offensichtlich gerade, besitzt also eine reine Cosinus-Reihe:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos kx\ \mathrm{d}x = \frac{2}{k^2\pi}\left(\cos k\pi - \cos k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{\pi}{8} - \ & \frac{2}{\pi}\cos\ x + \frac{4}{4\pi}\cos 2x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + 0\cdot\cos 4x \\ & - \frac{2}{25\pi}\cos 5x + \frac{4}{36\pi}\cos 6x - \frac{2}{49\pi}\cos 7x + 0\cdot\cos 8x + \ \ldots \end{aligned}$$

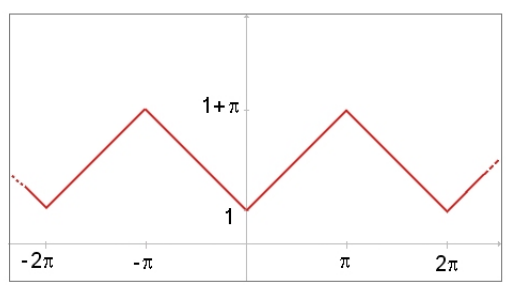
Algemein gilt:

$$a_k = \begin{cases} -\dfrac{2}{k^2\pi} & ,\ k = 4l+1 \\ \dfrac{4}{k^2\pi} & ,\ k = 4l+2 \\ -\dfrac{2}{k^2\pi} & ,\ k = 4l+3 \\ 0 & ,\ k = 4l+4 \end{cases} \qquad l = 0,1,2\ldots$$

$$F(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{(4l+1)^2}\cos{(4l+1)x} + \frac{2}{(4l+2)^2}\cos{(4l+2)x} - \frac{1}{(4l+3)^2}\cos{(4l+3)x}\right)$$

16. **Lösungshinweise:**

$f(x)$ ist offensichtlich einen *gerade* Funktion, die Fourierreihe damit eine reine Cosinus-Reihe, in der Reihenentwicklung



$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos kx + b_k\sin kx\}$$

gilt $b_k = 0\ ,\quad k = 1,\ldots\ .$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)}_{gerade}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{(\pi+1)^2-1}{\pi} = \pi+2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos kx}_{gerade}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos kx\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left((x+1)\frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k}\sin kx \, dx \right) = \frac{2}{\pi}\left((x+1)\frac{\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right)\Big|_0^\pi$$

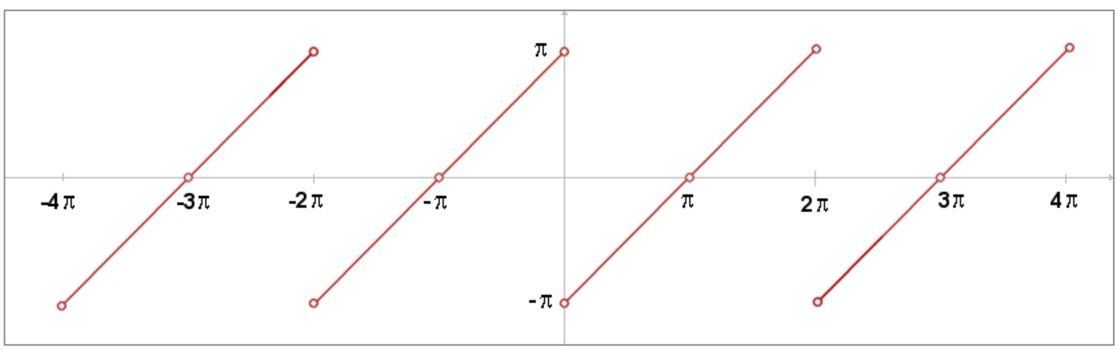
$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & , \ k = 2l-1 \\ 0 & , \ k = 2l \end{cases} \quad , \quad l = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{\pi+2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos kx$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2l-1)x}{(2l-1)^2} = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \ldots \right)$$

17. **Lösungshinweise:**

a)



b) f ist *ungerade*, es gilt $f(-x) = -f(x)$.

c) Weil f ungerade ist, ist die Fourierreihe eine reine Sinus-Reihe, in der Entwicklung $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$ gilt $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$.

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x-\pi)\sin kx \, dx = \frac{2}{\pi}(x-\pi)\left(\frac{-\cos kx}{k}\right)\Big|_0^\pi + \frac{2}{k\pi}\underbrace{\int_0^\pi \cos kx \, dx}_{=0}$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi}(-\pi)\left(\frac{-\cos 0}{k}\right) = -\frac{2}{k} \ , \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \sim F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{k}\sin k\,x\right) = (-2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\,x}{k}$$

$$= (-2)\left(\sin x + \frac{\sin 2\,x}{2} + \frac{\sin 3\,x}{3} + \ldots\right)$$

d) f ist stückweise glatt und die Reihe konvergiert daher für $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gegen $f(x)$. Für $x = k\pi$, $k \in Z$, konvergiert die Reihe gegen des Mittel aus links- und rechtsseitigen Gremzwert von $f(x)$, wird also 0. Insbesondere kann $f(x)$ in den „Lücken“ $x_k = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, damit stetig ergänzt werden und die Reihe konvergiert dann auch dort gegen die ergänzte Funktion.

18. **<u>Lösungshinweise:</u>**

a) $f(x)$ ist offensichtlich *ungerade*, in der Reihenentwicklung

$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ gilt $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin kx \;\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi} \left(-\cos k\pi + 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \; k = 2l \\ \dfrac{4}{k\pi} & , \; k = 2l - 1 \end{cases} \quad l = 1, 2, \ldots \qquad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin\,(2l-1)\,x}{2l-1}$$

b) Es gilt $f(x) = \bar{f}(\frac{x}{\pi})$ bzw. mit $t = \frac{x}{\pi}$, daß $\bar{f}(t) = f(\pi t)$ und für die Fourier-Reihe deshalb

$$\bar{F}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin\,(2l-1)\,\pi t}{2l-1}$$