Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit **(Lösungshinweise)**

1. **Lösungshinweise:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(4-3x)}{x^3(5-3x^2)}=\dfrac{4}{5}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)}=\dfrac{1}{3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2(3x^2+2x+1)}{(x-1)^2}=6$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)=n$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=-1$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=+\infty$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}-x^2}{1+\frac{1}{x^2}}=-\infty$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{3+\frac{1}{x^2}}=-\dfrac{1}{3}$

2. **Lösungshinweise:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}=\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{(3x)\to 0}\dfrac{(3x)}{\sin(3x)}=\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\dfrac{x}{\sin x}=1\cdot 1=1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{8\cdot\frac{x^2}{4}}=\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{4}\cdot(1)^2=\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{4x}=\lim\limits_{2x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{2x}\right)^{2x}\right]^2=\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^2=\mathrm{e}^{-2}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x+1\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{-2}=\mathrm{e}^2$.

f) $\lim\limits_{x\to 0+0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(1+\dfrac{1}{\cot x}\right)^{\cot x}=\lim\limits_{\cot x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{\cot x}\right)^{\cot x}=\mathrm{e}$.

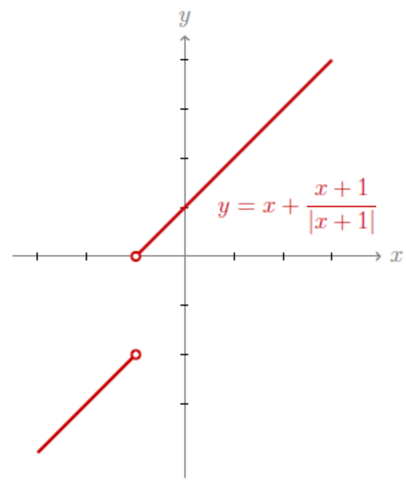
3. **Lösungshinweise:**

Für die Skizzen der Funktionsverläufe sollen hier keine „Kurvendiskussion“ durchgeführt werden Sie lassen sich qualitativ weithehend entwickeln aus der Kenntnis der Graphen elementarer Funktionen, aus denen die betrachteten Funktionen zusammengesetzt sind. In einigen der Skizzen sind deshalb diese Grundfunktionen mit angegeben.
Alternativ ist hier natürlich auch ein graphikfähiger Taschenrechner einsetzbar.

a) Die Funktion

$$f(x) = x + \frac{x+1}{|x+1|} = \begin{cases} x+1 & , \quad x > -1 \\ x-1 & , \quad x < -1 \end{cases}$$

ist definiert und stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, sie nicht stetig erweiterbar (Sprungstelle).



b) Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+1)}$$

ist definiert und stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.
Bei $x = 2$ ist sie durch $f(2) = 0$ stetig erweiterbar (Lücke), denn

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+1} = 0 \quad .$$

Für $x = -1$ besitzt sie eine Polstelle mit

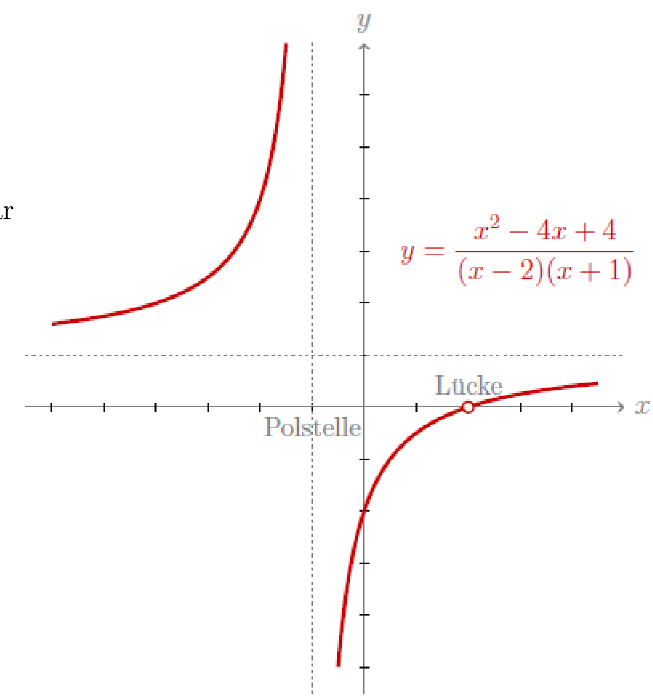
$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x-2}{x+1} = +\infty$$

und

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \frac{x-2}{x+1} = -\infty.$$

Die stetige Erweiterung ist hier

$$\bar{f}(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & , & x \neq 2 \\ 0 & , & x = 2 \end{array} \right\} = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$$



c) Die Funktion

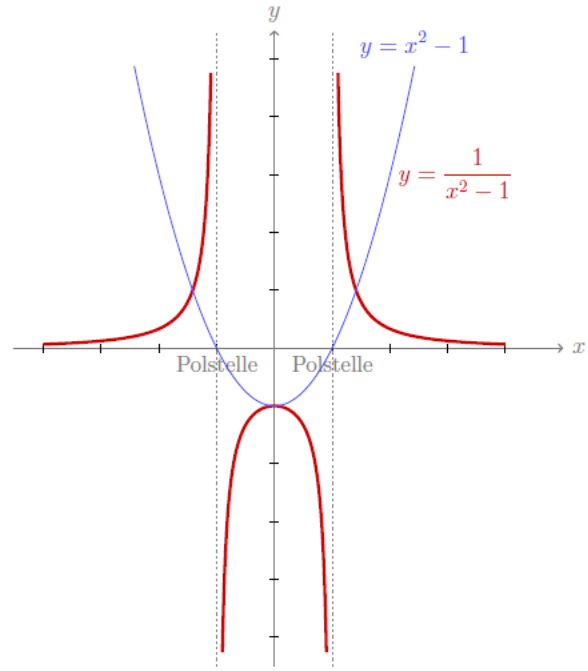
$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

ist definiert und stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$,
in $x = \pm 1$ besitzt sie Pole mit

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$$

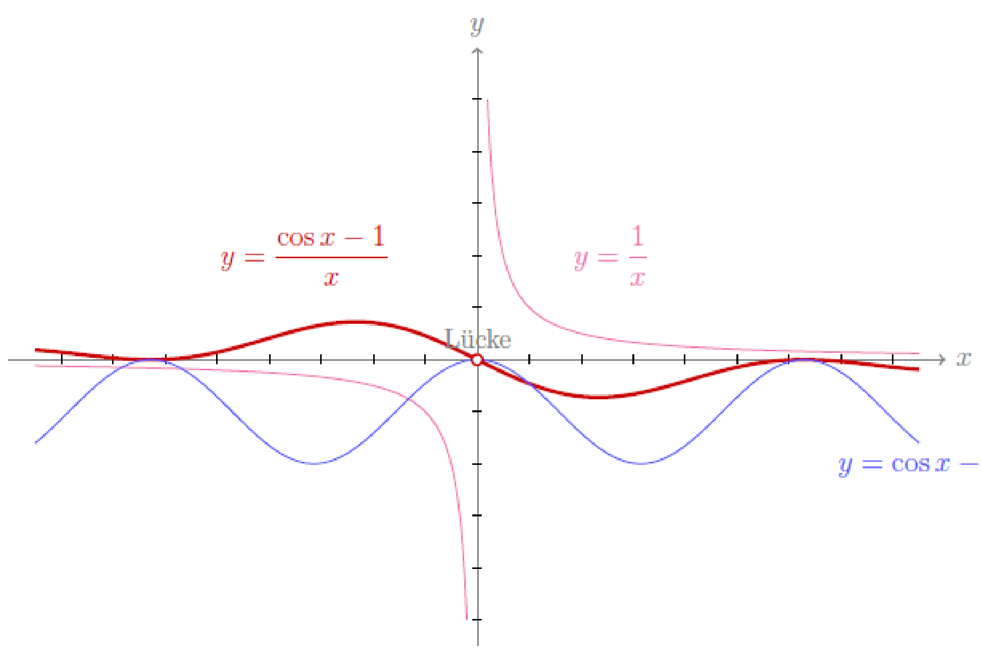
und

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty .$$

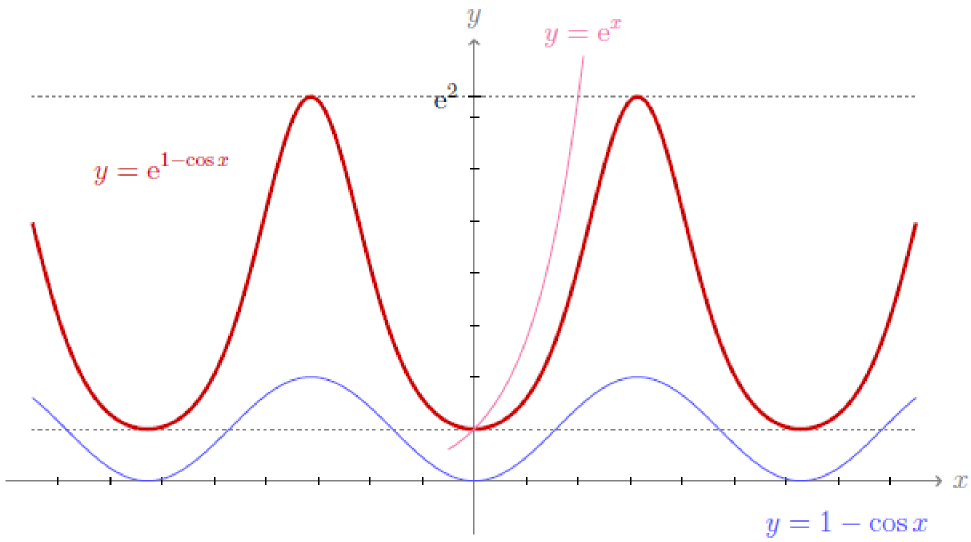


d) Die Funktion $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ ist definiert und stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sie ist in $x = 0$ durch $f(0) = 0$ stetig erweiterbar (Lücke), denn

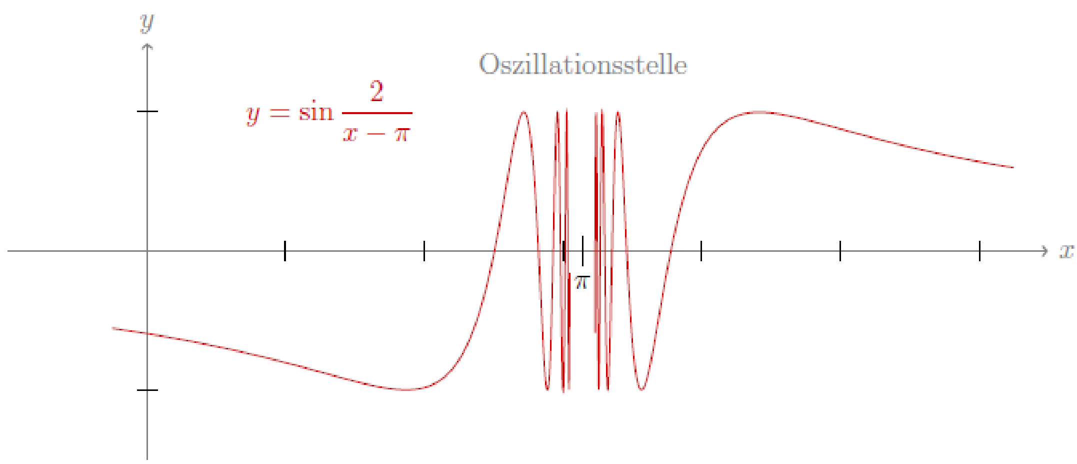
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(- \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} \right) = - \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} = (-1) \cdot 1 \cdot 0 = 0 .$$



e) Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{1-\cos x}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und dort als Komposition stetiger Funktionen selbst stetig.



f) Die Funktion $f(x) = \sin \dfrac{2}{x-\pi}$ ist definiert und stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$. In $x = \pi$ ist sie nicht stetig erweiterbar, denn $\lim\limits_{x\to\pi} \sin \frac{2}{x-\pi}$ existiert nicht (Oszillationsstelle).



g) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$$

ist definiert und stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. Bei $x = 0$ ist sie durch $f(0) = 0$ stetig erweiterbar (Lücke), denn

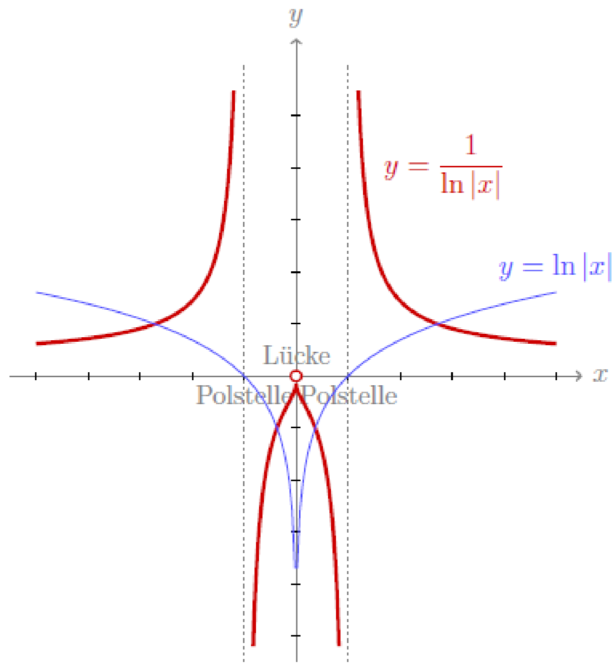
$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{\ln|x|} \;=\; \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{\ln|x|} \;=\; 0 \quad .$$

Bei $x = \pm 1$ besitzt sie Pole mit

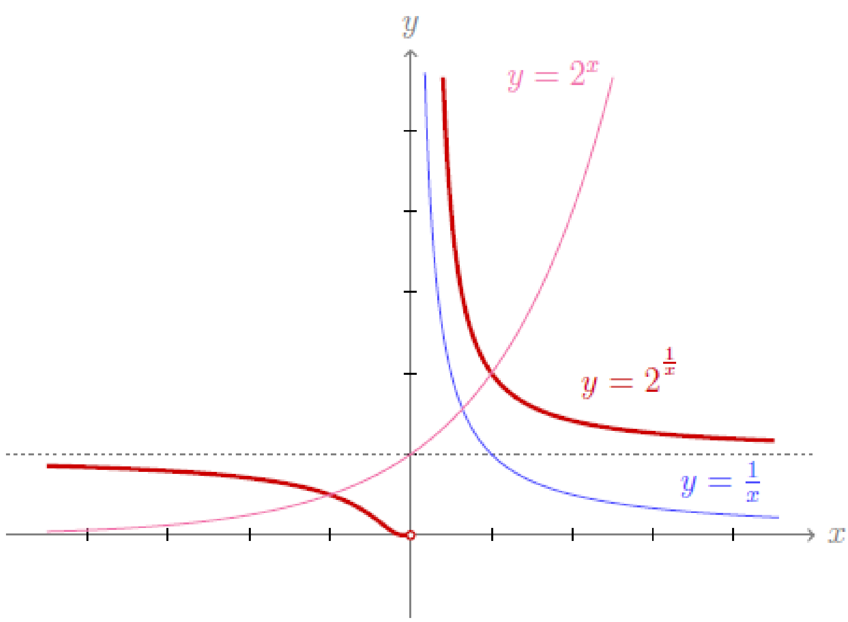
$$\lim_{x \to -1-0} \frac{1}{\ln|x|} = \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{\ln|x|} = +\infty$$

und

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{1}{\ln|x|} = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\ln|x|} = -\infty \;.$$



h) Die Funktion $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ ist definiert und stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bei $x = 0$ ist sie nicht stetig erweiterbar, weil $\lim\limits_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x}} = 2^{-\infty} = 0$, jedoch $\lim\limits_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x}} = 2^{+\infty} = +\infty$.



4. **Lösungshinweise:**

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{g-f}{fg} \quad \Longrightarrow \quad b(g) = \frac{fg}{g-f} = \frac{fg - f^2 + f^2}{g-f} = f + \frac{f^2}{g-f} \ , \quad \text{Polstelle in } g = f \ ,$$

$$\lim_{g \to f-0} b(g) = \lim_{g \to f-0} \left(f + \frac{f^2}{g-f} \right) = -\infty \quad , \quad \lim_{g \to f+0} b(g) = \lim_{g \to f+0} \left(f + \frac{f^2}{g-f} \right) = +\infty \quad .$$

5. **Lösungshinweise:**

$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + (-\sqrt{x+2})$ ist als Summe streng monoton fallender und stetiger Funktionen selbst streng monoton fallend und stetig auf $D_f = [-2; \infty)$. Zudem ist $f(0) = 2 - \sqrt{2} > 0$ und $f(1) = \frac{2}{\mathrm{e}} - \sqrt{3} < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert in $(0;1)$ eine Nullstelle, die wegen der strengen Monotonie die einzige in D_f ist.

6. **Lösungshinweise:**

Als Komposition stetiger Funktionen $(y = f(u), u = v^2, v = sin(w), w = g(x))$ ist
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto f(\sin^2(g(x))$ ebenfalls stetig.

7. **Lösungshinweise:**

Gilt **nicht**, z.B. sei $h(x)$ stetig für $x \in \mathbb{R}$ und für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine Konstante $K \neq 0$ seien f bzw. g definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & , \quad x \leq x_0 \\ h(x) - K & , \quad x > x_0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq x_0 \\ K & , \quad x > x_0 \end{cases} \quad .$$

Dann sind f und g in x_0 offensichtlich unstetig, ihre Summe $h = f + g$ jedoch stetig.

8. **Lösungshinweise:**

Zum Beispiel sind

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ 1 - x & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

in $x = 0$ und $x = 1$ unstetig, jedoch ist

$$f(g(x)) = \left\{ \begin{array}{ccrl} 0 & , \text{ falls} & g(x) = 0 \ , & \text{wenn also } x = 1 \\ 1 - g(x) = 1 - x & , \text{ falls} & 0 < g(x) < 1 \ , & \text{wenn also } 0 < x < 1 \\ 1 & , \text{ falls} & g(x) = 1 \ , & \text{wenn also } x = 0 \end{array} \right\} = 1 - x \ , \ \ x \in [0;1]$$

stetig in $[0;1]$.