Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Komplexe Zahlen (Lösungshinweise)

1. Sei $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 4 - 3\,i$. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 \cdot \overline{z}_2$, z_1/z_2, $\overline{z}_1 + z_2$, $z_1 - \overline{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$, $\overline{z}_1/z_2$, $z_1 + \overline{z}_2$, z_1^2, $|z_1|$, $|z_2|$ und $|z_1 - z_2|$.

<u>**Lösungshinweise:**</u>

$z_1 = 1 + i\ ,\ \ z_2 = 4 - 3i.$

$z_1 + z_2 = 5 - 2i\ ,\ \ z_1 - z_2 = -3 + 4i\ ,\ \ z_1 \cdot z_2 = 7 + i\ ,\ \ z_1 \cdot \overline{z}_2 = 1 + 7i\ ,\ \ z_1/z_2 = \frac{1}{25} + \frac{7}{25}i\ ,$
$\overline{z}_1 + z_2 = 5 - 4i\ ,\ \ z_1 - \overline{z}_2 = -3 - 2i\ ,\ \ \overline{z_1 \cdot z_2} = 7 - i\ ,\ \ \overline{z}_1/z_2 = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}i\ ,\ \ z_1 + \overline{z}_2 = 5 + 4i\ ,\ \ z_1^2 = 2i\ ,$
$|z_1| = \sqrt{2}\ ,\ \ |z_2| = 5\ ,\ \ |z_1 - z_2| = 5\ .$

---

2. Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil von

a) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{4\,i}{1+i} + 1$ b) $z = -\dfrac{(1+2\,i)(2-i) + 3\,i - 6}{(2-i)^2 - 2 + i}$ c) $z = -\dfrac{1}{2 - \frac{2}{i+1}}$

<u>**Lösungshinweise:**</u>

a) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{4\,i}{1+i} + 1 = \dfrac{(1+i)^2 + 4\,i(1-i)}{(1-i)(1+i)} + 1 = \dfrac{1 + 2\,i - 1 + 4\,i + 4}{2} + 1 = 3 + 3\,i\ ,$ $Re(z) = 3\ ,$ $Im(z) = 3\ .$

b) $-\dfrac{(1+2\,i)(2-i) + 3\,i - 6}{(2-i)^2 - 2 + i} = -\dfrac{(2-i)(1+2\,i-3)}{(2-i)(2-i-1)} = -\dfrac{2\,i - 2}{1 - i} = 2\ ,\quad Re(z) = 2\ ,\ Im(z) = 0\ .$

Variante (Ausmultiplizieren, stets gleich $i^2 = -1$ ersetzt)

$$-\frac{(1+2\,i)(2-i) + 3\,i - 6}{(2-i)^2 - 2 + i} = -\frac{2 - i + 4\,i + 2 + 3\,i - 6}{4 - 4\,i - 1 - 2 + i} = -\frac{-2 + 6\,i}{1 - 3\,i} = 2$$

c) $-\dfrac{1}{2 - \frac{2}{i+1}} = -\dfrac{1}{\frac{2(i+1)-2}{i+1}} = -\dfrac{i+1}{2\,i} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\,i} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\quad ,\quad Re(z) = -\dfrac{1}{2}\ ,\ Im(z) = \dfrac{1}{2}\ .$

---

3. Für welche *reellen* c ist $z = \dfrac{1+i}{c-i}$ selbst *reell*, für welche *rein imaginär*? Welche Zahl stellt z dann jeweils dar?

<u>**Lösungshinweise:**</u>

$$z = \frac{1+i}{c-i} = \frac{1+i}{c-i} \cdot \frac{c+i}{c+i} = \frac{(c-1) + (c+1)\,i}{c^2+1} = \frac{c-1}{c^2+1} + \frac{c+1}{c^2+1}\,i$$

z reell $\Leftrightarrow \Im m(z) = 0 \Leftrightarrow c = -1$, dann ist $z = -1$;

z rein imaginär $\Leftrightarrow \Re e(z) = 0 \Leftrightarrow c = 1$, dann ist $z = i$.

---

4. Überführen Sie $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $z_3 = -3-3\,i$ und $z_4 = 1-i$ in die trigonometrische Form $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ und in die exponentielle Form $z = re^{i\,\varphi}$ und berechnen Sie damit $z_1 \cdot z_2$, $z_1 \cdot \overline{z}_2$, z_4^2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{z_1^2}{z_2^3 \cdot z_4}$ und z_4^7 . Das Ergebnis ist jeweils in der arithmetischen Form $z = a + b\,i$ anzugeben.

Lösungshinweise:

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_2 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\,\sin\frac{2}{3}\pi = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}$,

$z_3 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\sin\frac{5}{4}\pi\right) = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi i}$, $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{4}\pi i}$.

$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi\right) + i\,\sin\pi\right) = -2$.

Trigonometrische und exponentielle Form von $\overline{z}_2$:

$\overline{z}_2 = \cos\frac{2}{3}\pi - i\,\sin\frac{2}{3}\pi = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ (∗)

$\quad = \cos\left(2\pi - \frac{2}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(2\pi - \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi i}$.

$z_1 \cdot \overline{z}_2 = \frac{2}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right) = 2\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\quad = 1 - \sqrt{3}\,i$.

Hinweis: (∗) ist noch **nicht** die *trigonometrische* Form vom $\overline{z}_2$, weil das Argument $-\frac{2}{3}\pi$ nicht aus dem Intervall $[0; 2\pi)$ ist ! Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen kann man für die praktische Rechnung aber auch diese Form benutzen und erhält dann kürzer

$z_1 \cdot \overline{z}_2 = 2 \cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$.

$z_4^2 = (\sqrt{2})^2\left(\cos 2 \cdot \frac{7}{4}\pi + i\,\sin\frac{14}{4}\pi\right) = 2\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\sin\frac{\pi}{2}\right) = -2\,i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 - \sqrt{3}\,i\ ,$$

(wegen $z_2 \cdot \overline{z}_2 = 1$ ergibt sich hier $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \overline{z}_2$.)

$$\frac{z_1^2}{z_2^3 \cdot z_4} = \frac{2^2}{1^3 \cdot \sqrt{2}}\left(\cos\left(2 \cdot \tfrac{\pi}{3} - 3 \cdot \tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{7}{4}\pi\right) + i\,\sin\left(-\tfrac{37}{12}\pi\right)\right) = -2{,}73 + 0{,}73\,i$$

$z_4^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos 7 \cdot \frac{7}{4}\pi + i\,\sin\frac{49}{4}\pi\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8 + 8\,i$.

5. Bestimmen Sie *Realteil* und *Imaginärteil* der *komplexen* Zahl $\quad z = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\,\frac{\pi}{6}}}{1-\sqrt{3}\,\mathbf{i}}$

Lösungshinweise:

$$\begin{aligned}
z \;&= \frac{2\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{6}}}{1-\sqrt{3}\,i} = \frac{2\,(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})}{1-\sqrt{3}\,i} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}\,i} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}\,i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}\\
&= \frac{(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}\,i)}{4} = \frac{\sqrt{3}+i+3\,i-\sqrt{3}}{4} = i\\
&\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z)=0\ ,\quad \mathrm{Im}(z)=1\quad .
\end{aligned}$$

Lösungsvariante:

Nenner in trigonometrischer Form

$r=\sqrt{1+3}=2\ ,\quad \cos\varphi=\dfrac{1}{2}\ ,\quad 4.$ Quadrant $\quad\Rightarrow\quad \varphi = 2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{3}\pi\ .$

$$\begin{aligned}
z \;&= \frac{2\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{6}}}{1-\sqrt{3}\,i} = \frac{2\,(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})}{2\,(\cos\frac{5}{3}\pi+i\,\sin\frac{5}{3}\pi)} = \frac{2}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5}{3}\pi\right)\right)\\
&= \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 0+1\cdot i\\
&\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z)=0\ ,\quad \mathrm{Im}(z)=1\quad .
\end{aligned}$$

---

6. Beweisen Sie die Formel von John Machin (1706): $\qquad \dfrac{\pi}{4} = 4\ \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)\ -\ \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$

Hinweis: Stellen Sie die Argumente der komplexen Zahlen $z_1=5+i$ und $z_2=239+i$ als arctan-Werte dar und verwenden Sie die Eigenschaften der Argumente für Produkte/Potenzen bzw. Quotienten komplexer Zahlen zur Konstruktion einer dritten Zahl z so, daß die Argumente von z, z_1 und z_2 gerade die gesuchte Formel liefern.

Lösungshinweise:

$z_1 = \quad 5+i\ \ (1.\ \text{Quadrant}) \quad\Rightarrow\quad \arg(\quad 5+i) = \arctan\frac{1}{5}$

$z_2 = 239+i\ \ (1.\ \text{Quadrant}) \quad\Rightarrow\quad \arg(239+i) = \arctan\frac{1}{239}$

Nun gilt bekanntlich $\quad 4\ \arg(z_1)\ -\ \arg(z_2) = \arg\left(\dfrac{z_1^4}{z_2}\right)\ .$

Wegen $\quad z_1^4 = (5+i)^4 = \left[(5+i)^2\right]^2 = [(24+10\,i]^2 = 476+480\,i\ $ findet man

$$\begin{aligned}
z &= \frac{z_1^4}{z_2} = \frac{z_1^4\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}} = \frac{(476+480\,i)\cdot(239-i)}{239^2+1} = \frac{114\,244+114\,244\,i}{57\,122}\\
&= 2+2\,i\ \ (1.\ \text{Quadrant}) \Rightarrow\ \ \varphi = \arg z = \arctan\tfrac{2}{2} = \arctan 1 = \tfrac{\pi}{4}\ .
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt das gerade die Formel von Machin

$$\tfrac{\pi}{4} = \arg z = \arg\left(\tfrac{z_1^4}{z_2}\right) = 4\ \arg(z_1)\ -\ \arg(z_2) = 4\ \arctan\left(\tfrac{1}{5}\right)\ -\ \arctan\left(\tfrac{1}{239}\right)\quad .$$

---

7. Welche komplexen Zahlen erfüllen die nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen? Skizzieren Sie die Lösungsmengen in der GAUSSschen Zahlenebene.

a) $Re(z) + Im(z) = c,\ c \in R$ b) $1 \leq |z-2| \leq 4$ c) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\bar{z}} = 1$ d) $|z+1| \leq |z-1|$

Lösungshinweise:

Mit $z = x + y\,i$, d.b. $R(z) = x$, $Im(z) = y$, der (reelle) x-Achse als Abszisse und der (imaginären) y-Achse als Ordinate ergibt sich:

a) $x + y = c$, $y = -x + c$, Gerade mit Anstieg -1 und Achsenabschnitt c.

b) $1 \leq (x-2)^2 + y^2 \leq 16$, Kreisring mit Mittelpunkt $(2;0)$, Inneradius 1 und Außenradius 4.

c) $\dfrac{1}{x+y\,i} + \dfrac{1}{x-y\,i} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} = 1$ mit $(x,y) \neq (0,0)$, $2x = x^2 + y^2$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$,
Kreis(-linie) mit Radius 1 um Mittelpunkt $z = 1$, ausgenommen $z = 0$.

d) $|x + yi + 1| \leq |x + yi - 1|$, $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$
$x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq x^2 - 2x + 1 + y^2$, $x \leq 0$, d.b. $\Re e\,(z) \leq 0$, also die Punkte auf und links der imaginären Achse (2. und 3. Quadrant).

---

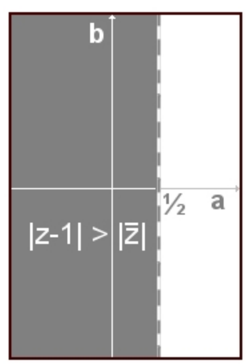
8. In welchem Bereich der GAUSSschen Zahlenebene liegen die komplexen Zahlen z, die die Ungleichung

a) $|\,z-1\,| > |\,\bar{z}\,|$ b) $|\,i \cdot z\,| < |\,i + z\,|$ c) $Re\left(\dfrac{z+2}{z}\right) = 2$ erfüllen?

Lösungshinweise:

a)

$$\begin{array}{rcl} |\,z-1\,| > |\,\bar{z}\,| & , & z = a + b\,i \;\Rightarrow \\ |\,z-1\,| & > & |\,\bar{z}\,| \\ |\,a+b\,i-1\,| & > & |a - b\,i\,| \\ \sqrt{(a-1)^2 + b^2} & > & \sqrt{a^2+b^2} \\ a^2 - 2a + 1 + b^2 & > & a^2 + b^2 \\ -2a + 1 & > & 0 \\ a & < & \dfrac{1}{2} \\ b & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

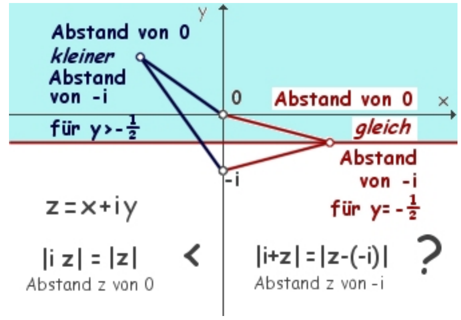


b) $|\,i\,z\,| < |\,i + z\,|$, $z = x + i\,y$ $\Rightarrow$ $|\,i\,(x + i\,y)\,| < |\,i + x + i\,y\,|$, $|\,-y + i\,x\,| < |\,x + i\,(y+1)\,|$,

$\sqrt{(-y)^2 + x^2} < \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$, $y^2 + x^2 < x^2 + y^2 + 2y + 1$, $0 < 2y + 1$, $y > -\dfrac{1}{2}$

Die Lösungsmenge der Ungleichung sind alle $z \in \mathbb{C}$, die in der Gaussschen Zahlenebene oberhalb der Geraden $\mathrm{Im}(z) > -\frac{1}{2}$ liegen.

Die Lösung läßt sich auch durch graphische Überlegungen finden. Wegen $|\,i\,z\,| = |\,z\,| = |\,z - 0\,|$ und $|\,i + z\,| = |\,z - (-i)\,|$ sind die gesuchten Punkte gerade die, deren Abstand von $z = 0$ kleiner ist als ihr Abstand von $z = -i$ (siehe Skizze).

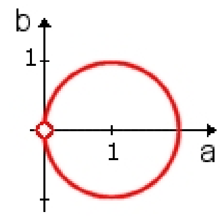


c) $\dfrac{z+2}{z} = \dfrac{a+ib+2}{a+ib} \cdot \dfrac{a-ib}{a-ib} = \dfrac{a^2 + i\,ab + 2a - i\,ab + b^2 - 2i\,b}{a^2+b^2}$

$= \dfrac{a^2+2a+b^2}{a^2+b^2} - \dfrac{2b}{a^2+b^2}\,i \quad , \quad a^2+b^2 \neq 0 \qquad \boxed{z \neq 0\,!}$

$Re\left(\dfrac{z+2}{z}\right) = \dfrac{a^2+2a+b^2}{a^2+b^2} = 2 \quad , \quad a^2+2a+b^2 = 2(a^2+b^2) \quad ,$

$a^2 - 2a + b^2 = 0 \quad , \quad (a-1)^2 - 1 + b^2 = 0 \quad , \quad (a-1)^2 + b^2 = 1 \quad .$



---

9. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen w der Gleichung und skizzieren Sie die Lage der Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.
   a) $2w^4 + 9 = 9\sqrt{3}\,i$ b) $(w+1)^3 - i = 0$ c) $w^6 = 1$

Lösungshinweise:

a) $w^4 = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{3}\,i = 9(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\sin\frac{2}{3}\pi)$, $w_k = \sqrt[4]{9}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{4} + i\,\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)\right)$;

$w_0 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i$, $w_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $w_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i$.

b) $(w+1)^3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}$, $w_k + 1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + k\,2\pi}{3} + i\,\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2}{3}\pi\right)$;

$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6} - 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \frac{i}{2} \approx -0{,}134 + 0{,}5\,i$,

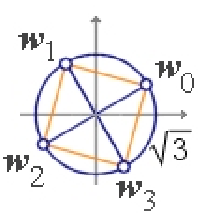
$w_1 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\,\sin\frac{5}{6}\pi - 1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \frac{i}{2} \approx -1{,}866 + 0{,}5\,i$,

$w_2 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\,\sin\frac{3}{2}\pi - 1 = -1 - i$.

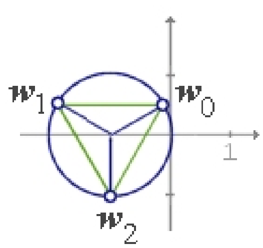
c) $w^6 = 1 = \mathrm{e}^{0\,i}$, $w_k = \sqrt[6]{1}\,\mathrm{e}^{\frac{0+k\,2\pi}{6}\,i} = \mathrm{e}^{k\,\frac{\pi}{3}\,i}$;

$w_0 = \mathrm{e}^{0\,i} = 1$, $w_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\,i} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\,i)$, $w_2 = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\,i} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i)$,

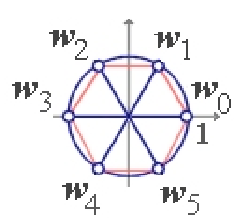
$w_3 = \mathrm{e}^{\pi\,i} = -1$, $w_4 = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi\,i} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\,i)$, $w_5 = \mathrm{e}^{\frac{5}{3}\pi\,i} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\,i)$.



zu a)



zu b)



zu c)

---

10. Berechnen Sie (nur) die komplexen Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\quad w^8 + 1 + \sqrt{3}\, i = 0 \quad$, die im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegen und geben Sie diese in arithmetischer (algebraischer) Form an. Wieviel verschiedene Lösung besitzt die Gleichung insgesamt?

Lösungshinweise:

$w^8 + 1 + \sqrt{3}\, i = 0 \quad , \quad w^8 = -1 - \sqrt{3}\, i = 2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) \quad , \quad$ denn

$|-1 - \sqrt{3}\, i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \quad ,$

$\arg(-1 - \sqrt{3}\, i) = \arctan \sqrt{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi \qquad$ (3.Quadrant) .

Damit besitzt die Gleichung insgesamt die 8 Lösungen

$$w_{k+1} = \sqrt[8]{2}\left(\cos \frac{\frac{4}{3}\pi + k\, 2\pi}{8} + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\,\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad , \quad k = 0, 1, \ldots 7 \quad .$$

Davon liegen im ersten Quadranten die mit

$$\varphi_k = \frac{\pi}{6} + k\,\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad k \leq \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{3} \quad , \text{ also für } k = 0, 1 :$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}94 + 0{,}55\, i \quad ,$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos \frac{5}{12}\,\pi + i \sin \frac{5}{12}\,\pi\right) \approx 0{,}28 + 1{,}05\, i \quad .$$

---

11. Berechnen Sie sämtliche komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:
a) $z^2 - 8z + 65 = 0$ b) $z^2 - (3+5i)z - 16 + 4\,i = 0$ c) $(z^2 + 2\,i)^2 + 4 = 0$ d) $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$

Lösungshinweise:

a) $z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{|16 - 65|}\, i = 4 \pm 7\, i.$

b) $z_{1,2} = \dfrac{3 + 5i}{2} \pm w$, w eine Lösung von $w^2 = D = \left(\dfrac{3+5i}{2}\right)^2 + 16 - 4\, i = 12 + \frac{7}{2}\, i$.

Man findet $D = \frac{25}{2}\, e^{0{,}2838\, i}$, daraus $w_1 = \sqrt{\frac{25}{2}}\, e^{0{,}1419\, i} = 3,5 + 0,5\, i$, $w_2 = -w_1$, und schließlich $z_{1,2} = 1,5 + 2,5\, i \pm (3,5 + 0,5\, i)$, d.b. als Lösungen der Gleichung
$z_1 = 5 + 3\, i$, $z_2 = -2 + 2\, i$.

c) $(z^2 + 2\, i)^2 + 4 = 0 \quad , \quad z^4 + 4\, i z^2 - 4 + 4 = 0 \quad , \quad z^2(z^2 + 4\, i) = 0$

1. $z^2 = 0 \quad , \quad z_{1,2} = 0$

2. $z^2 = -4\, i = 4\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right)$, $z_{k+3} = \sqrt{4}\left(\cos \dfrac{\frac{3}{2}\pi + k\, 2\pi}{2} + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi + k\,\pi\right)\right)$, $k = 0, 1$

$$z_3 = 2\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_4 = 2\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

d) Die Substitution $w = z^3$ überführt die gegebene Gleichung $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$ in die quadratische Gleichung $w^2 - 4w + 8 = 0$ mit den Lösungen $w_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 8} = 2 \pm 2\, i$

Rücksubstitution:

1. $z^3 = w_1 = 2 + 2\,i = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z_{k+1} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + k\,2\pi}{3} + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12} + k\,\frac{2}{3}\pi\right)\right) \quad , \quad k = 0,1,2$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\sin\frac{\pi}{12}\right) = 1{,}366 + 0{,}366\,i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi\right) + i\,\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -1 + i$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi\right) + i\,\sin\frac{17}{12}\pi\right) = -0{,}366 - 1{,}366\,i$$

2. $z^3 = w_2 = 2 - 2\,i = \sqrt{8}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

$$z_{k+4} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + k\,2\pi}{3} + i\,\sin\left(\frac{7}{12}\pi + k\,\frac{2}{3}\pi\right)\right) \quad , \quad k = 0,1,2$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\,\sin\frac{7}{12}\pi\right) = -0{,}366 + 1{,}366\,i$$

$$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\cos\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\,\sin\frac{15}{12}\pi\right) = -1 - i$$

$$z_6 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) + i\,\sin\frac{23}{12}\pi\right) = 1{,}366 - 0{,}366\,i$$

---

12. Unter Verwendung der Moivreschen Formel und des Binomischen Satzes leite man die folgenden trigonometrischen Beziehungen her: $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, $\cos 3\varphi = -3\cos\varphi + 4\cos^3\varphi$.

Lösungshinweise:

Moivreschen Formel: $(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\,\sin 3\varphi \quad (*)$

Binomischer Satz:

$(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^3$

$= \binom{3}{0}\cos^3\varphi(i\,\sin\varphi)^0 + \binom{3}{1}\cos^2\varphi(i\,\sin\varphi)^1 + \binom{3}{2}\cos^1\varphi(i\,\sin\varphi)^2 + \binom{3}{3}\cos^0\varphi(i\,\sin\varphi)^3$

$= \cos^3\varphi + 3\,i\,\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\,\sin^3\varphi$

$= (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi) + i\,(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi) \quad (**)$

Der Vergleich der Realteile und Imaginärteile von $(*)$ und $(**)$ liefert schließlich:

$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi(1 - \cos^2\varphi) = -3\cos\varphi + 4\cos^3\varphi$

$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3(1 - \sin^2\varphi)\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$

---

13. Durch die Anwendung der Produktformel für komplexe Zahlen in trigonometrischer Form auf das Produkt der Zahlen $z = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$ und $w = \cos\beta + i\,\sin\beta$ leite man die Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus her.

<u>**Lösungshinweise:**</u>

Aus der Produktformel

$[r_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2)] = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\ +\ i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

findete man für das Produkt

$z \cdot w = (\cos\alpha + i\,\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\,\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta)\ +\ i\,\sin(\alpha+\beta) \quad (*)$.

Andererseit gilt auch

$$z \cdot w = (\cos\alpha + i\,\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\,\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + i\,\cos\alpha\sin\beta + i\,\sin\alpha\cos\beta + i^2\,\sin\alpha\sin\beta$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\ +\ (i\,\cos\alpha\sin\beta + i\,\sin\alpha\cos\beta) \quad (**)$$

Der Vergleich der Realteile und Imaginärteile von $(*)$ und $(**)$ liefert die Additionstheoreme:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$$

---

14. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften komplexer Zahlen

a) $Re(z) = \dfrac{z+\bar z}{2}$ b) $Im(z) = \dfrac{z-\bar z}{2\,i}$ c) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar z}$

<u>**Lösungshinweise:**</u>

a) $\dfrac{z+\bar z}{2} = \dfrac{a+b\,i\ +\ a-b\,i}{2} = \dfrac{2a}{2} = a = Re(z)$

b) $\dfrac{z-\bar z}{2\,i} = \dfrac{a+b\,i\ -\ a+b\,i}{2\,i} = \dfrac{2b\,i}{2\,i} = b = Im(z)$

c) $\sqrt{z \cdot \bar z} = \sqrt{(a+b\,i)\cdot(a-b\,i)} = \sqrt{a^2 - (b\,i)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

---

15. Beweisen Sie (durch einfaches Nachrechnen mit $z = a + b\,i$ die folgenden Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen :

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

<u>**Lösungshinweise:**</u>

a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(a_1 + b_1\,i) \pm (a_2 + b_2\,i)} = \overline{(a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\,i}$
$= (a_1 \pm a_2) - (b_1 \pm b_2)\,i = (a_1 - b_1\,i) \pm (a_2 - b_2\,i) = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1\,i) \cdot (a_2 - b_2\,i) = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\,i$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1\,i) \cdot (a_2 + b_2\,i)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,i}$
$= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\,i = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

c) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}\right)} \overset{(1)}{=} \dfrac{\overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}}}{\overline{z_2} \cdot \overline{\overline{z_2}}} \overset{(2)}{=} \dfrac{\overline{z_1} \cdot z_2}{\overline{z_2} \cdot z_2} \overset{(3)}{=} \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, (1) nach b), (2) wegen $\overline{\overline{z}} = z$, (3) kürzen.

---

16. Beweisen Sie mit Hilfe von Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen:
Ist z_0 eine komplexe Lösung der Gleichung $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ mit *reellen* Koeffizienten a_i , $i = 0, 1, ..., n$, so ist auch die konjugiert Komplexe $\overline{z_0}$ Lösung dieser Gleichung.

Lösungshinweise:

Bekannte Eigenschaften komplexer Zahlen sind $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, bzw. allgemeiner für Summen $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$, für Produkte $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$ und speziell für Potenzen $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$.
Reelle Zahlen sind komplexe Zahlen, deren Imaginaärteil verschwindet, deshalb gilt für *reelle* Zahlen a, daß $\overline{a} = a$.
Mit diesen Eigenschaften komplexer Zahlen ist die Behauptung einfach zu beweisen:

Ist z_0 eine komplexe Lösung der Gleichung $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ mit *reellen* Koeffizienten a_i , $i = 0, 1, ..., n$, so gilt $a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0 + a_0 = 0$. Geht man auf beiden Seiten der Gleichung zur konjugiert Komplexen über, so erhält man unter Ausnutzung der eingangs aufgeführten Eigenschaften:

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0} \qquad \textit{(Eigenschaft von Summen} \Rightarrow\textit{)}$$

$$\overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = \overline{0} \qquad \textit{(Eigenschaft von Produkten} \Rightarrow\textit{)}$$

$$\overline{a_n}\ \overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}}\ \overline{z_0^{n-1}} + ... + \overline{a_1}\ \overline{z_0} + \overline{a_0} = \overline{0} \qquad \textit{(Eigenschaften von Potenzen und reellen Zahlen} \Rightarrow\textit{)}$$

$$a_n\ \overline{z_0}^{\,n} + a_{n-1}\ \overline{z_0}^{\,n-1} + ... + a_1\ \overline{z_0} + a_0 = 0$$

Also ist auch $\overline{z_0}$ Lösung dieser Gleichung.