

Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Lineare Gleichungssysteme, invertierbare Matrizen

1. Lösungshinweise:

In den ersten Spalten der Tabellen zum Gauß-Algorithmus sind die Faktoren angegeben, mit denen die Leitzeile (*) multipliziert und dann zu der jeweiligen Zeile addiert wurde.

zu (a):

| | x_1 | x_2 | x_3 | |
|----------------|-------|----------------|-------|-----|
| -3 | 3 | 2 | 2 | -1 |
| * | 1 | 6 | -1 | 3 |
| -4 | 4 | 1 | 5 | -6 |
| * | 0 | -16 | 5 | -10 |
| $-\frac{9}{5}$ | 0 | -23 | 9 | -18 |
| * | 0 | $\frac{29}{5}$ | 0 | 0 |

Aus den mit (*) gekennzeichneten Zeilen erhält man das gestaffelte System

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ -16x_2 + 5x_3 &= -10 \\ \frac{29}{5}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

und daraus die eindeutige Lösung $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -2$. Das zugeordneten *homogenen* Systems ist nur *trivial* lösbar.

zu (b):

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|----|-------|-------|-------|-------|-----|
| | 0 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| * | -2 | 1 | -1 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 3 | -1 | 1 |
| 3 | 6 | -2 | -2 | -2 | 16 |
| * | 0 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| -2 | 0 | 5 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 0 | 1 | -5 | 7 | 19 |
| * | 0 | -1 | 0 | -2 | -4 |
| -2 | 0 | 16 | 0 | 17 | 34 |
| * | 0 | 0 | 0 | -15 | -30 |

Aus den mit (*) gekennzeichneten Zeilen erhält man das gestaffelte System

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -x_2 - 2x_4 &= -4 \\ -15x_4 &= -30 \end{aligned}$$

und daraus nach Rückwärtseinsetzen die eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 \\ x_2 &= 4 - 2x_4 = 0 \\ x_3 &= 3 - 2x_4 - 3x_2 = -1 \\ x_1 &= -\frac{1}{2}(1 - x_2 + x_3 - 3x_4) = 3 \end{aligned}$$

zu (c):

| | x_1 | x_2 | x_3 | |
|----|-------|-------|-------|----|
| 3 | 3 | -1 | 2 | 0 |
| 7 | 7 | -4 | -1 | -2 |
| -1 | -1 | -3 | -12 | -4 |
| * | -1 | 2 | 5 | 2 |
| | 0 | 5 | 17 | 6 |
| * | 0 | 5 | 17 | 6 |
| -2 | 0 | 10 | 34 | 12 |
| 1 | 0 | -5 | -17 | -6 |
| -1 | 0 | 5 | 17 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 |

Aus den mit (*) gekennzeichneten Zeilen erhält man das gestaffelte System

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 17x_3 &= 6 \end{aligned}$$

und mit dem Parameter $x_3 = s$ ergibt sich als allgemeine Lösung

des gegebenen inhomogenen Systems: des zugeordneten *homogenen* Systems:

| | | |
|-------------------------------------|-----------|------------------------|
| $x_1 = \frac{2}{5} - \frac{9}{5}s$ | $s \in R$ | $x_1 = -\frac{9}{5}s$ |
| $x_2 = \frac{6}{5} - \frac{17}{5}s$ | | $x_2 = -\frac{17}{5}s$ |
| $x_3 = s$ | | $x_3 = s$ |
| | | |

zu (d):

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| | 3 | 0 | 6 | -3 | 0 | 1 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| * | 0 | 1 | -4 | 2 | 0 | -2 |
| -3 | 4 | 3 | 0 | 0 | -3 | -4 |
| * | 3 | 0 | 6 | -3 | 0 | 1 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| -2 | 4 | 0 | 12 | -6 | -3 | 2 |
| * | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| 1 | -2 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Mit $x_3 = s$, $x_5 = t$ ergibt sich eine Darstellung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{3}{2}t \\ x_2 & = & -\frac{4}{3} + 3t \\ x_3 & = & s \\ x_4 & = & -\frac{1}{3} + 2s - \frac{3}{2}t \\ x_5 & = & t \end{array} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Für die Lösungsmenge des homogenen Systems sind $-\frac{4}{3}$ und $-\frac{1}{3}$ durch 0 zu ersetzen.

zu (e):

| | x_1 | x_2 | x_3 | |
|---|-------|-------|-------|-----|
| * | 1 | 0 | -2 | -12 |
| | -1 | 1 | -2 | 12 |
| | 3 | -2 | 2 | -30 |
| * | 0 | 1 | -4 | 0 |
| | 0 | -2 | 8 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 6 |

Das System ist unlösbar.

Für das zugeordnete *homogene* System hat man das gestaffelte System:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -2x_3 & = 0 \\ x_2 & -4x_3 & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2t \\ x_2 & = & 4t \\ x_3 & = & t \end{array} \quad t \in \mathbb{R}$$

mit der Lösung:

zu (f):

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|----|-------|-------|-------|-------|----|
| | 0 | 2 | 3 | -1 | 1 |
| * | 2 | 1 | -1 | 2 | 2 |
| -2 | 4 | 4 | 1 | 3 | 1 |
| * | 0 | 2 | 3 | -1 | 1 |
| -1 | 0 | 2 | 3 | -1 | -3 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | -4 |

Das gegebene System ist **unlösbar**.

Für das zugeordnete *homogene* System hat man das gestaffelte System:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}$$

und daraus mit $x_3 = s$, $x_4 = t$ die allgemeine Lösung

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{5}{4}s - \frac{5}{4}t \\ x_2 & = & -\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t \\ x_3 & = & s \\ x_4 & = & t \end{array} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

2. Lösungshinweise:

| | x_1 | x_2 | x_3 | |
|----------------|-------|--------------|-------|-------------|
| * | 1 | -2 | 3 | -4 |
| -2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| -1 | 1 | α | 2 | $-\beta$ |
| * | 0 | 5 | -5 | 10 |
| $-\frac{1}{5}$ | 0 | $\alpha + 2$ | -1 | $4 - \beta$ |
| (*) | 0 | $\alpha + 1$ | 0 | $2 - \beta$ |

Das System

- ist eindeutig lösbar für $\alpha \neq -1$,
- ist unlösbar, wenn $\alpha = -1$ und $\beta \neq 2$,
- besitzt unendlich viele Lösungen, wenn $\alpha = -1$ und $\beta = 2$.

Für $\alpha = \beta = 0$

ergibt sich das gestaffelte System

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 = -4 \\ & 5x_2 & -5x_3 = 10 \\ & x_2 & = 2 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung:

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0.$$

Für $\alpha = -1, \beta = 2$

ergibt sich das gestaffelte System

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 = -4 \\ & 5x_2 & -5x_3 = 10 \end{array}$$

und daraus die allgemeine Lösung:

$$x_1 = -5t, x_2 = 2 - t, x_3 = t, t \in \mathbb{R}.$$

3. Lösungshinweise:

a)

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|----|-------|-------|-------|-------|-----|
| ★ | 1 | 0 | -2 | -3 | -12 |
| 1 | -1 | 1 | -2 | 6 | 12 |
| -3 | 3 | -2 | a | -15 | -30 |
| ★ | 0 | 1 | -4 | 3 | 0 |
| 2 | 0 | -2 | $a+6$ | -6 | 6 |
| ★ | 0 | 0 | $a-2$ | 0 | 6 |

b) $a = 5$ (★-Zeilen aus a))

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|--|-------|-------|-------|-------|-----|
| | 1 | 0 | -2 | -3 | -12 |
| | 0 | 1 | -4 | 3 | 0 |
| | 0 | 0 | 3 | 0 | 6 |

c) homogen und $a = 2$

(★-Zeilen aus a))

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|--|-------|-------|-------|-------|---|
| | 1 | 0 | -2 | -3 | 0 |
| | 0 | 1 | -4 | 3 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

a) Das System

- ist unlösbar, wenn $a = 2$,

- besitzt unendlich viele Lösungen, wenn $a \neq 2$;

- ist für **kein** a eindeutig lösbar.

(Bitte nicht durch die 0 bei x_4 in der letzten Zeile irritieren lassen, es sind 3 Gleichungen und 4 (!) Variable).

b) Für $a = 5$ erhält man die allgemeine Lösung:

$$x_1 = -8 + 3x_4, x_2 = 8 - 3x_4, x_3 = 2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Nichtnegativitätsforderungen für x_1 bzw. x_2 ergibt sich notwendig $x_4 = 8/3$ und damit als *einzige* nichtnegative Lösung:

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 8/3.$$

c) Für $a = 2$ erhält man als Lösung des zugeordneten homogenen Systems:

$$x_1 = 2x_3 + 3x_4, x_2 = 4x_3 - 3x_4, x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

d) Fordert man $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$, so folgt aus der ersten Gleichung des Systems notwendig $x = 3$. Dafür ist auch die zweite Gleichung erfüllt und aus der dritten Gleichung folgt für den Parameterwert $a = 4$.

4. Lösungshinweise:

| | x | y | z | |
|----|-----|--------|----------|--------|
| ★ | 1 | 1 | b | -1 |
| -3 | 3 | $b+1$ | $b-1$ | -1 |
| -t | b | 2 | 1 | 0 |
| ★ | 0 | $-b+2$ | $2b+1$ | -2 |
| 1 | 0 | $b-2$ | b^2-1 | $-b$ |
| ★ | 0 | 0 | b^2+2b | $-b-2$ |

Aus den mit (★) gekennzeichneten Zeilen erhält man das gestaffelte System

$$\begin{array}{rcl} x + & y + & bz = -1 \\ & (-b+2)y + & (2b+1)z = -2 \\ & & b(b+2)z = -(b+2) \end{array}$$

- Für $b = -2$ entfällt die letzte Gleichung und das Restsystem

$$\begin{array}{rcl} x + & y - & 2z = -1 \\ & 4y - & 3z = -2 \end{array}$$

besitzt bei Wahl von $z = t$ als freien Parameter die Lösungsmenge

$$z = t, y = \frac{1}{4}(-2 + 3z) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}t, x = -1 - y + 2z = -1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}t + 2t = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}t,$$

bzw. in Vektorform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Für $b = 0$ entsteht in der letzten Gleichung ein Widerspruch, das System ist unlösbar.
- Für $b = 2$ ergeben die zwei letzten Gleichung Vorschriften zur Berechnung von z . Aus der zweiten Gleichung folgt $z = -\frac{2}{5}$; im Widerspruch dazu aus der dritten Gleichung $z = -\frac{1}{2}$, das System ist unlösbar.
- Für $b \notin \{-2; 0; 2\}$ ist das System eindeutig lösbar. Durch rückwärts Auflösen ergibt sich in Abhängigkeit von b die Lösung

$$z = -\frac{1}{b},$$

$$y = \frac{1}{-b+2}(-2 - (2b+1)z) = \frac{1}{-b+2}(-2 + \frac{2b+1}{b}) = \frac{1}{(-b+2)b} = \frac{1}{2b-b^2},$$

$$x = -1 - y - bz = -1 - \frac{1}{2b-b^2} + 1 = -\frac{1}{2b-b^2}.$$

Speziell für $b = 1$ ergibt sich die Lösung $x = -1$, $y = 1$, $z = -1$.

5. Lösungshinweise:

$$A : \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B : \begin{array}{cc|cc} 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 7 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \left(\begin{array}{l} \text{Zeilen(!)-} \\ \text{vertauschung!} \end{array} \right) \implies B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

C :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie man durch „geschultes“ Hingucken leicht sieht oder auch erst durch Nachrechnen (GAUSS-JORDAN) erkennt, ist die Matrix C nicht invertierbar, weil sie linear abhängige Zeilen enthält. Addiert man z.B. die Zeilen 1 und 2 und dann die Zeilen 3 und 4, so entsteht zwei Zeilen mit jeweils vier Einsen. Voneinander abgezogen, ergibt das eine Nullzeile. Die bei der Invertierung zu lösenden Gleichungssysteme sind also nicht eindeutig lösbar.

(Äquivalent dazu: Die *Determinante* von C verschwindet, C besitzt nicht den vollen *Rang*.)

$$D : \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

(nach **Zeilen(!)**vertauschung!)

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

6. Lösungshinweise:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Simultanrechnung: $(A|E|b|B) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (E|A^{-1}|x|X)$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 1 & 2 & 7 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 2 & 7 & -3 \end{array}$$

Wird A durch \bar{A} ersetzt, so verläuft die Rechnung (bei entsprechender Wahl der Leitelemente und **ohne** während der Rechnung Zeilen oder gar Spalten **zu vertauschen!**) ganz analog, nur sind im linken Teil der Tabelle ebenfalls die **Spalten** 1 und 2 vertauscht und müssen deshalb in den Ergebnissen die **Zeilen (!!)** 1 und 2 vertauscht werden:

$$\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A}^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{A}^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} .$$

7. Lösungshinweise:

a) Aus $(2A^T - X)B - AB^T = E$ folgt $(2A^T - X)B = E + AB^T$. Durch Multiplikation von rechts mit B^{-1} erhält man $2A^T - X = (E + AB^T)B^{-1}$ und daraus schließlich $X = 2A^T - (E + AB^T)B^{-1}$.

b) Für symmetrische Matrizen $A = A^T$ und $B = B^T$ ergibt sich speziell $X = 2A - (E + AB)B^{-1} = A - B^{-1}$.

c) Berechnung B^{-1} :

$$\begin{array}{ccc|ccc} -3 & \boxed{-1} & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 7 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -7 & 12 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad X = A - B^{-1} \quad (A, B \text{ symmetrisch !!})$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 12 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ -7 & 12 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$