Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Matrizen (Grundoperationen)

---

1. **Lösungshinweise:**

$$A+B=\begin{pmatrix}3&5&2\\3&5&8\end{pmatrix},\qquad B-A=\begin{pmatrix}1&11&-6\\-11&-5&4\end{pmatrix},\qquad 3A=\begin{pmatrix}3&-9&12\\21&15&6\end{pmatrix},$$

$$A-\tfrac{1}{2}B=\begin{pmatrix}0&-7&5\\9&5&-1\end{pmatrix},\qquad A^T=\begin{pmatrix}1&7\\-3&5\\4&2\end{pmatrix},\qquad \text{und } A^T+B \text{ nicht definiert,}$$

$$AC=\begin{pmatrix}27\\7\end{pmatrix},\quad A^TB=\begin{pmatrix}-26&8&40\\-26&-24&36\\0&32&4\end{pmatrix},\quad C^TC=30\,,\quad CC^T=\begin{pmatrix}1&-2&5\\-2&4&-10\\5&-10&25\end{pmatrix}$$

---

2. **Lösungshinweise:**

$$AB=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-1&4&-3\\2&1&3\end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix}4&6&-1\\-2&-4&0\\3&-1&4\end{pmatrix},\qquad AB^T=\begin{pmatrix}3&-2&2\\3&-6&5\\-3&0&2\end{pmatrix},$$

$$BA^T=(AB^T)^T\,,\qquad A^TB^T=(BA)^T\,.$$

---

3. **Lösungshinweise:**

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad BA=\begin{pmatrix}12&0&8\\0&0&0\\-18&0&-12\end{pmatrix}\quad AO=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad AE=\begin{pmatrix}6&2&4\\0&1&0\end{pmatrix}\quad EB=\begin{pmatrix}2&-4\\0&0\\-3&6\end{pmatrix}$$

---

4. **Lösungshinweise:**

(a) $AB=BA \quad\Rightarrow\quad (AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B=A(AB)B=(AA)(BB)=A^2B^2\,.$

Für $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ mit $AB=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\neq BA=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$,

zum Beispiel gilt jedoch

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\quad,\ B^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad,$$

$$A^2B^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\neq(AB)^2=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

(b) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$ weil i.A. $AB\neq BA$.
Gleichheit gilt genau dann, wenn $AB=BA$.

(c) $(2A+B)^2-(A+\frac{1}{2}B)(4A)-(E-B)^2-B2A+2B(2A-E)E+E$
$=(2A+B)^2-2(2A+B)A-E^2+EB+BE-B^2-2BA+4BA-2B+E$
$=(2A+B)(2A+B-2A)-E+2B-B^2+2BA-2B+E$
$=2AB+B^2-B^2+2BA$
$=2(AB+BA)\ .$

(d) $A^T(A+B)-B^TA-(B^TB)^T-2(A-B)^T(A+B)+\left[(A+B)^T(A-B)\right]^T$
$=A^T(A+B)-B^T(A+B)-2(A^T-B^T)(A+B)+(A-B)^T(A+B)$
$=(A^T-B^T-2AT+2B^T+A^T-B^T)(A+B)=O$ (Nullmatrix)

---

5. **Lösungshinweise:**

$$X=(BC^T-2A)^T=\begin{pmatrix} -13 & 24 & 0 \\ 13 & -9 & 37 \end{pmatrix}$$

---

6. **Lösungshinweise:**

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & c \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ d & 4 \end{pmatrix}\right]^T\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 1+2d \\ 6+c & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 19+2d & 18a+b(1+2d) \\ 13+c & a(6+c)+7b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4c & 2c \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert für das Feld $(2,1)$ den Wert $c=-1$ und danach für das Feld $(1,1)$ den Wert $d=-\dfrac{23}{2}$. Damit erhält man anschließend mittels der Felder $(1,2)$ und $(2,2)$ das Gleichungssystem $5a+7b=6\ ,\ 18a-22b=-2$ mit der Lösung $a=b=-\dfrac{1}{2}$.

---

7. **Lösungshinweise:**

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+ab & a+c \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Lösungsmenge $a=t\ ,\ b=0,\ c=-t$ mit $t\in\mathbb{R}$ beliebig reell.

---

8. **Lösungshinweise:**

$$AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$XA=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{11}+x_{12} \\ x_{21} & x_{21}+x_{22} \end{pmatrix}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich bezüglich der beiden Produkte folgen die Bedingungen $x_{21}=0$ und $x_{11}=x_{22}$.

Damit hat die gesuchte Matrix die Struktur $X=\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ mit p,q beliebig reell.

9. **Lösungshinweise:**

		A	C^T	$+$	B	$=$	X	$+$	A^T	B
Vorgaben	$\Rightarrow$	$(\ ;\mathbf{5})$	$(\ ;\mathbf{3})$	$+$	$(\ ;\ )$	$=$	$(\ ;\ )$	$+$	$(\mathbf{5};\ )$	$(\ ;\ )$
Verkettung AC^T	$\Rightarrow$	$(\ ;5)$	$(\mathbf{5};3)$	$+$	$(\ ;\ )$	$=$	$(\ ;\ )$	$+$	$(5;\ )$	$(\ ;\ )$
Addition links	$\Rightarrow$	$(\ ;5)$	$(5;3)$	$+$	$(\ ;\mathbf{3})$	$=$	$(\ ;\ )$	$+$	$(5;\ )$	$(\ ;\ )$
Addition rechts	$\Rightarrow$	$(\ ;5)$	$(5;3)$	$+$	$(\ ;3)$	$=$	$(\mathbf{5};\ )$	$+$	$(5;\ )$	$(\ ;\ )$
Gleichheit	$\Rightarrow$	$(\mathbf{5};5)$	$(5;3)$	$+$	$(\mathbf{5};3)$	$=$	$(5;\mathbf{3})$	$+$	$(5;\ )$	$(\ ;\mathbf{3})$
A,B links										
$\Rightarrow A^T, B$ rechts	$\Rightarrow$	$(5;5)$	$(5;3)$	$+$	$(5;3)$	$=$	$(5;3)$	$+$	$(5;\mathbf{5})$	$(\mathbf{5};3)$

10. **Lösungshinweise:**

$(AB)C$: Die $(4;5)$-Matrix AB hat 20 Elemente, jedes entsteht als Skalarprodukt einer Zeile der $(4;2)$-Matrix A mit einer Spalte von $(2;5)$-Matrix B, erfordert also 2 Multiplikationen $(\mathcal{M})$ und 1 Addition $(\mathcal{A})$. Das Produkt AB erfordert insgesamt $20 \cdot (2\mathcal{M} + 1\mathcal{A}) = 40\mathcal{M} + 20\mathcal{A}$.

Die $(4;1)$-Matrix $(AB)C$ besitzt 4 Elemente, jedes Element entsteht als Skalarprodukt einer Zeile der $(4;5)$-Matrix AB mit einer Spalte von $(5;1)$-Matrix C, erfordert also $5\mathcal{M} + 4\mathcal{A}$. Das Produkt AB erfordert insgesamt $4 \cdot (5\mathcal{M} + 4\mathcal{A}) = 20\mathcal{M} + 16\mathcal{A}$.

Bei der Berechnungsreihenfolge $(AB)C$ sind also insgesamt $\boxed{60\mathcal{M} + 36\mathcal{A}}$ erforderlich.

$A(BC)$: Für die Berechnungsreihenfolge $A(BC)$ ermittelt man auf analoge Weise wie oben

$2 \cdot (5\mathcal{M} + 4\mathcal{A}) + 4 \cdot (2\mathcal{M} + 1\mathcal{A}) = \boxed{18\mathcal{M} + 12\mathcal{A}}$. Im Vergleich zu der anderen erfordert Sie etwa nur ein Drittel der Operationen.