

Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Reihen reeller Zahlen

1. Lösungshinweise:

a) Quotientenkriterium (QK): $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{3} < 1$, konvergent.

b) QK: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \rightarrow \frac{3}{e} > 1$, divergent.

c) Alternierende Reihe: $\frac{1}{\ln n} \rightarrow 0$, $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}$, konvergent (LEIBNITZ-Kriterium).

d) QK: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{\ln n}{\ln n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}} \rightarrow 1$, nicht entscheidbar. Notwendige Konvergenzbedingung $a_n \rightarrow 0$ ist erfüllt. Jedoch gilt $\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow$ divergent, *harmonische Reihe* $\sum \frac{1}{n}$ ist *divergente Minorante*.

e) QK: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{\ln e}{\ln e \cdot 1} = 1$, nicht entscheidbar. Notwendige Konvergenzbedingung $a_n \rightarrow 0$

ist erfüllt. Die direkte Berechnung der n -ten Partialsumme ergibt $S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \left(-\ln k + \ln(k+1)\right) = \ln(n+1)$, d.h. S_n wächst mit n unbeschränkt.

f) QK: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{b^{n+1}}{1+b^{n+1}} \cdot \frac{1+b^n}{b^n} \right| = b \cdot \frac{1+b^n}{1+b^{n+1}}$ ($b > 0$)

$0 < b < 1 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow b < 1$, konvergent.

$b = 1 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1$, nicht entscheidbar; direkt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$, bestimmt divergent.

$b > 1 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = b \cdot \frac{b^n\left(\frac{1}{b^n} + 1\right)}{b^n\left(\frac{1}{b^n} + b\right)} = b \cdot \frac{\frac{1}{b^n} + 1}{\frac{1}{b^n} + b} \rightarrow b \cdot \frac{1}{b} = 1$, nicht entscheidbar; jedoch gilt $a_n = \frac{b^n}{1+b^n} = \frac{1}{\frac{1}{b^n} + 1} \rightarrow 1$, notwendige Konvergenzbedingung nicht erfüllt, divergent.

g) Die Reihe ist *divergent*, wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ ist die notwendige Konvergenzbedingung nicht erfüllt.

h) Wegen $|\sin n| < 1 \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| = \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \frac{|\sin n|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ und folglich ist die betrachtete Reihe *absolut* konvergent nach *Vergleichskriterium*, denn $\sum \frac{1}{n^2}$ ist eine *konvergente Majorante* (Vorlesungsbeispiel).

$$\text{i) QK: } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+1} = \frac{\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{1+0}{\sqrt{1+0}+0} = 1,$$

nicht entscheidbar. Notwendige Konvergenzbedingung $a_n \rightarrow 0$ ist erfüllt.

Jedoch gilt (für $n > 1$) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} > \frac{1}{2n}$ und folglich ist die betrachtete Reihe divergent nach *Vergleichskriterium*, denn die („halbe“) *harmonische Reihe* $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$ ist *divergente Minorante* (Vorlesungsbeispiel).

2. Lösungshinweise:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \text{ unter Verwendung}$$

der Summenformel für die Glieder einer geometrischen Folge $\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{3^{2k-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{24}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} = \frac{24}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{24}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right] = \frac{24}{7}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2 - k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^2 - k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k-1)k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \right] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2. \end{aligned}$$

3. Lösungshinweise:

$$\text{a) } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{8^{k-1}}{3^{2k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{24} \left(\frac{8}{9}\right)^k = \frac{1}{24} \frac{8}{9} \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}\right) \rightarrow S = \frac{1}{3}.$$

Mit der Berechnung von S ist auch die Konvergenz der Reihe nachgewiesen.

Nur Konvergenz erhält man z.B. aus dem Quotienten-Kriterium:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{8^k}{3^{2k+3}} \cdot \frac{3^{2k+1}}{8^{k-1}} = \frac{8}{9} < 1 \Rightarrow \text{konvergent.}$$

$$\text{b) Quotienten-Kriterium: } \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(2p)^{k+1}}{k+4} \cdot \frac{k+3}{(2p)^k} \right| = 2|p| \frac{k+3}{k+4} \rightarrow 2|p|$$

\Rightarrow konvergent, falls $|p| < \frac{1}{2}$, divergent, falls $|p| > \frac{1}{2}$.

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+3}, \text{ divergent, } \textit{harmonische Reihe}.$$

$$p = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+3}, \text{ konvergent, LEIBNIZ-Kriterium.}$$

4. Lösungshinweise:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{p^{2k}}{2+5k}$$

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} p^{2(n+1)}}{2+5(n+1)} \cdot \frac{2+5n}{(-1)^n p^{2n}} \right| = p^2 \frac{2+5n}{7+5n} = p^2 \frac{\frac{2}{n}+5}{\frac{7}{n}+5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p^2 .$$

Demnach konvergiert die Reihe für $p^2 < 1 \Leftrightarrow |p| < 1$ und divergiert für $|p| > 1$.

Die Punkte mit $|p| = 1$, d.b. $p = \pm 1$ sind gesondert zu untersuchen:

$$p = \pm 1 : \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\pm 1)^{2k}}{2+5k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2+5k} .$$

Die Reihe alterniert, die Beträge der Glieder sind monoton fallend.

In beiden Fällen konvergiert die Reihe nach dem LEIBNIZ-Kriterium.

Die gegebene Reihe konvergiert also für $|p| \leq 1$ bzw. $-1 \leq p \leq 1$ und ist sonst divergent.

Bemerkung: Obwohl die Reihe für $p \neq 0$ alternierend ist, sollte man hier nicht versuchen, Konvergenzuntersuchungen allein mit dem LEIBNIZ-Kriterium durchführen zu wollen. Wegen der Abhängigkeit von dem Parameter p ist die Untersuchung darauf, ob und für welche p die Beträge der Glieder eine monotone (!) Nullfolge bilden, nicht so einfach durchzuführen (wie etwa die Anwendung des Quotientenkriteriums). Dazu kommt noch, dass das LEIBNIZ-Kriterium „nur“ hinreichend ist. Für einen Divergenznachweis ist es deshalb nicht geeignet, weil eine alternierende Reihe auch dann konvergent sein kann, wenn die Beträge der Glieder eine Nullfolge bilden, die nicht monoton ist. Ist die Folge der Glieder keine Nullfolge, so divergiert die Reihe natürlich, aber das wegen der notwendigen Konvergenzbedingung und nicht nach dem LEIBNIZ-Kriterium.

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{(2p)^k} = (-3) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2p}\right)^k \text{ ist (das (-3)-fache) eine(r) geometrische(n) Reihe der Form } \sum_{k=0}^{\infty} q^k , \text{ die bekanntlich für } |q| < 1 \text{ konvergiert und dann die Summe } \frac{1}{1-q} \text{ besitzt. Folglich konvergiert die gegebene Reihe für } \left| -\frac{3}{2p} \right| = \frac{3}{2|p|} < 1 \Leftrightarrow |p| > \frac{3}{2} \Leftrightarrow p \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty) \text{ und besitzt für } p = 3 \text{ die Summe } S = (-3) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{6}\right)^k = (-3) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = (-3) \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = (-3) \frac{2}{3} = -2 .$$

Lösungsvarianten für Konvergenzuntersuchung:

$$\text{Quotientenkriterium: } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-3)^{n+2}}{(2p)^{n+1}} \cdot \frac{(2p)^n}{(-3)^{n+1}} \right| = \left| \frac{-3}{2p} \right| = \frac{3}{2|p|} < 1 .$$

$$\text{Wurzelkriterium: } \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{(-3)^{n+1}}{(2p)^n} \right|} = \frac{3 \sqrt[n]{3}}{2|p|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2|p|} < 1 .$$

Dann sind aber noch die Punkte mit $\frac{3}{2|p|} = 1$, $p = \pm \frac{3}{2}$ gesondert zu untersuchen:

$$p = -\frac{3}{2} : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{(-3)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-3) , \quad p = \frac{3}{2} : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} 3 .$$

In beiden Fällen liegt Divergenz vor, weil die notwendige Konvergenzbedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ nicht erfüllt ist.

Bemerkung: Für $p < 0$ ist die betrachtete Reihe **keine** alternierende Reihe! Man sollte hier nicht versuchen, Konvergenzuntersuchungen allein mit dem LEIBNIZ-Kriterium durchführen zu wollen. (Vergleiche dazu auch die Bemerkungen zur Lösung der Aufgabe a))

5. Lösungshinweise:

Es gilt $a_n = \frac{3}{n^2} + (-1)^n \frac{1}{n^2} = \begin{cases} \frac{4}{n^2} & , n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n^2} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$ die Folgeglieder sind also positiv und

wegen $|(-1)^n a_n| = a_n \leq \frac{4}{n^2}$ ist die Reihe absolut konvergent nach Majorantenkriterium (die Reihe $\sum \frac{4}{n^2}$ ist konvergente Majorante).

Weil nun für gerade n gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{(n+1)^2}}{\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 < 1$

aber für ungerade $n \geq 3$ gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^2}} = 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 > 1$,

ist die Folge der a_n nicht monoton fallend.

Die letzte Abschätzung ist nicht offensichtlich, folgt aber z.B. daraus, daß

$$2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \frac{n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} n > n+1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)n > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{2}-1} \approx 2,41$$

6. Lösungshinweise:

a) Weil x und $\ln x$ für $x \geq 2$ positiv und monoton *wachsend* sind, ist $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ dort positiv und monoton *fallend*.

Das Integral $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln |\ln x| \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)) = \infty$

ist *divergent*. Nach Integralkriterium ist also die Reihe $\sum_{n=2}^\infty f(n) = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ ebenfalls *divergent*.

b) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2 - 1} = \frac{1}{4x(x+1)}$ ist für $x \geq 1$ offensichtlich positiv und monoton *fallend*.

Das Integral

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^2 - 1} dx &= \frac{1}{4} \int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{1}{4} \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln |x| - \ln |x+1| \right]_1^b \\ &= \frac{1}{4} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{b}{b+1} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{1 + \frac{1}{b}} + \ln 2 \right) = \frac{1}{4} (\ln 1 + \ln 2) = \frac{\ln 2}{4} \end{aligned}$$

ist *konvergent*.

Nach Integralkriterium ist folglich die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}$ ebenfalls *konvergent*.

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ ist für $x \geq 2$ positiv, weil dafür $x^3 > x^2$ gilt.

Zudem gilt $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} < 0$, sobald nur $\frac{3}{x^4} < \frac{2}{x^3}$ also $x > \frac{3}{2}$.

Folglich ist $f(x)$ für $x \geq 2$ auch monoton fallend.

Das Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{x-1}{x^3} dx = \int_2^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2b^2} \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8}$$

ist *konvergent*.

Nach Integralkriterium ist also die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^3}$ ebenfalls *konvergent*.

7. Lösungshinweise:

a) Das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{x(\ln x)^3}$ berechnet man etwa durch Substitution

$$t = \ln x, \quad dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2(\ln x)^2}$$

Für das uneigentliche Integral erhält man damit

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2(\ln x)^2} \right]_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2(\ln b)^2} \right) + \frac{1}{2(\ln 2)^2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2} \end{aligned}$$

das Integral ist also konvergent.

Weil nun x und $(\ln x)^3$ für $x \geq 2$ positiv und monoton wachsend sind, ist der Integrand $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$ positiv und monoton fallend.

Nach dem Integralkriterium hat die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^3}$$

das gleiche Konvergenzverhalten wie das Integral, ist also konvergent.

b) Das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ berechnet man etwa durch Substitution

$$t = 1 + \ln x, \quad dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |1 + \ln x|$$

Für das uneigentliche Integral erhält man damit

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln |1 + \ln x| \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|1 + \ln b| - \ln|1 + \ln 1| = +\infty - 0 = +\infty$$

das Integral ist also divergent.

Weil nun x und $1 + \ln x$ für $x \geq 1$ positiv und monoton wachsend sind, ist der Integrand $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$ positiv und monoton fallend.

Nach dem Intergralkriterium hat die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1 + \ln k)}$$

das gleiche Konvergenzverhalten wie das Integral, ist also divergent.